Über einige Anwendungen der elliptischen Funktionen auf die Theorie des ebenen Gelenkvierecks.

Inauguraldissertation

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Rostock

zur

Erlangung der Doktorwürde

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

vorgelegt von

Martin Blauert

aus **Dresden.**

Weida i. Th.
Druck von Thomas & Hubert
Spezialdruckerei für Dissertationen
1911.

Referent:

Herr Kais. Russ. Staatsrat Prof. Dr. Staude.

Meinem verehrten Lehrer

Herrn Geheimen Hofrat Dr. M. Krause

Ordentlicher Professor für Mathematik

an der Techn. Hochschule zu Dresden

in Dankbarkeit und Verehrung gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553620_0006

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 7

Kapitel I. Vorbetrachtungen:

§ 1. Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten des Gelenkvierecks 13

§ 2. Die Darbouxsche Darstellung der Winkel des Gelenkvierecks als Funktionen eines elliptischen Parameters 20

§ 3. Durchführung einiger notwendiger Differentiationen 36

Kapitel II. Die Polkurven und die Koppelkurve:

§ 4. Die Grundgleichungen der durch das Gelenkviereck erzeugten Bewegung 47

§ 5. Die Polkurven 53

§ 6. Die Koppelkurve im allgemeinen 57

Kapitel III. Die Koppelkurve mit drei- bis fünfpunktig berührender Tangente:

§ 7. Die dreipunktig berührende Tangente und der Wendekreis . 61

§ 8. Die vierpunktig berührende Tangente, der Ballsche Punkt und die Undulationskurve 67

§ 9. Die fünfpunktig berührende Tangente 77

Kapitel IV. Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente:

§ 10. Allgemeines 80

§ 11. Die speziellen Fälle $a = b$, $b = c$, $c = a$, $a = b = c$ 86

§ 12. Angabe weiterer spezieller Fälle und Durchführung eines derselben 102

Einleitung.

Das ebene Gelenkviereck als Grundlage vieler in der Technik gebräuchlicher Mechanismen sowie der Theorie der komplanen Bewegung zweier unveränderlicher ebener Systeme hat eine vielseitige Behandlung erfahren und lange Zeit das Interesse der Mathematiker und Ingenieure wach gehalten.

Besonders die mannigfaltigen Arten von Gelenkmechanismen, die bei verschiedener Wahl der Gliedlängen durch Gelenkvierecke entstehen können (Grashof), die Gestaltungsmöglichkeiten der Polkurven und der Koppelkurve sowie ihre Krümmungsverhältnisse (Burmester, Grübler, R. Müller), die dreifache Erzeugungsweise ein und derselben Koppelkurve durch drei verschiedene Gelenkvierecke (Roberts), die durch Gelenkvierecke erzeugten Kreis- und Geradführungen (Watt, Evans, Roberts, Tschebyscheff, R. Müller, Allievi) — alle diese Fragen und ähnliche Probleme sind im vergangenen Jahrhundert von den verschiedensten Seiten beleuchtet und behandelt worden, sodaß es eigentlich überflüssig erscheinen möchte, einige derselben von neuem aufzurollen.

Wenn dies trotzdem geschieht, so liegt der Grund hierfür darin, daß sich in den letzten Jahrzehnten die Behandlung kinematischer Probleme auf rein analytischem Wege und vor allem unter Benutzung elliptischer Funktionen als fruchtbringend erwiesen hat.

In der Kinematik herrschen vorzugsweise geometrisch synthetische Betrachtungsweisen mit mehr oder weniger analytischem Einschlag vor — und man kann wohl sagen, mit Recht, da sich hierbei in vieler Hinsicht, wie die Entwicklung gezeigt hat, die Resultate in einfacher Weise und ungezwungen

ergeben. Aber verschiedene Arbeiten der letzten Jahre haben gezeigt, daß man auch bei einer rein analytischen Behandlungsweise solcher Probleme unbeschadet ihrer geometrischen Natur zum Ziele gelangt, d. h. zu einer erschöpfenden Beschreibung der Bewegungsvorgänge, und vor allem dann, wenn es möglich ist, die bei derartigen Problemen notwendigerweise auftretenden Irrationalitäten von trigonometrischen Funktionen durch elliptische Funktionen in rationaler Form zu ersetzen. Daß dies beim ebenen Gelenkviereck möglich ist, hatte schon 1879 Darboux[1] durch die Darstellung der beim Gelenkviereck auftretenden Winkelfunktionen mittels eines einzigen elliptischen Parameters in seiner klassischen Abhandlung: „De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan“[1] gezeigt, ohne daß diese Darstellung sofort Verwendung für die Beschreibung der Bewegungsvorgänge beim Gelenkviereck gefunden hätte, da eben zu dieser und in der folgenden Zeit die geometrisch-synthetische Behandlungsweise kinematischer Probleme in ihrer vollsten Blüte stand und ihre schönsten Resultate zeitigte. Man mochte vielleicht auch nicht recht daran glauben, daß die komplexen doppeltperiodischen Funktionen für die praktischen Zwecke der Kinematik fruchtbringend verwertet werden könnten. Aus diesem Grunde blieb jedenfalls Darboux' Arbeit längere Zeit unbeachtet; erst Picciati[1], Lacour[1] und M. Krause[1] wiesen zu Anfang dieses Jahrhunderts wieder mit Nachdruck darauf hin, daß die elliptischen Funktionen für die Beschreibung kinematischer Bewegungsvorgänge wohl brauchbar seien und daß sich mit ihrer Hilfe viele bekannte Resultate in einfacher Weise herleiten lassen, daß sich aber auch manche Frage beantworten läßt, die bei der bisherigen Behandlungsweise ungelöst geblieben war. — Daß nun allerdings die rein analytische Behandlungsweise hiernach in allen Punkten vor der geometrisch-synthetischen den Vorzug verdient, soll damit nicht gesagt sein; denn es wird wohl immer Fragen und Probleme geben, vor allem auch in der Kinematik, wo die Eleganz und Kühnheit geometrisch-synthetischer Schluß-

[1] Siehe die Anmerkungen 1 bis 5 auf pag. 21.

folgerungen unmöglich übertroffen werden kann von der an enge, bestimmt vorgezeichnete Bahnen gebundenen Analysis.

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, wie die Darbouxsche Darstellung der für die Theorie des ebenen Gelenkvierecks wichtigen Winkel durch elliptische Funktionen zur Diskussion der Polkurven und der Koppelkurve, vor allem aber auch für die Theorie der höheren Berührungen und der sich hieran anschließenden Geradführungen verwendet werden kann.

Die ersten Abschnitte sind der Ableitung der für die späteren Rechnungen notwendigen Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten des Gelenkvierecks sowie der Zusammenstellung der Darbouxschen Formeln und der geometrischen Deutung des elliptischen Parameters gewidmet. Dann folgt die Diskussion der Polkurven und der Koppelkurve, die aber keineswegs Anspruch auf Vollständigkeit machen will, zumal es sich hier um bekannte Resultate handelt, die nur ganz kurz in einem anderen Gewande wiedergegeben werden sollen. Das Hauptgewicht ist vielmehr auf die Theorie der höheren Berührungen gelegt worden, und zwar vor allem deshalb, weil hier die Brauchbarkeit der elliptischen Funktionen am deutlichsten zutage tritt, besonders bei der sechspunktigen Berührung, die ja auch infolge ihrer Verwertung in der Theorie der Geradführungen ein mehr als mathematisches Interesse beansprucht.

In dem dritten Kapitel sind daher zunächst der Wendekreis, der Ballsche Punkt — hierbei eine neue einfache Linearkonstruktion des Ballschen Punktes —, die Undulationskurve und die fünfpunktig berührende Tangente der Koppelkurve rein analytisch in der Weise behandelt, daß nach bekannten Regeln der Differentialrechnung mit Hilfe der im ersten Kapitel aufgestellten Beziehungen die notwendigen Differentiationen durchgeführt werden.

Dagegen wird in dem letzten Kapitel die sechspunktige Berührung — bekanntlich beim Gelenkviereck die höchste überhaupt mögliche Berührung der Koppelkurve mit ihrer Tangente — mit Hilfe eines aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekanten Liouvilleschen Satzes gelöst, nach

welchem die Summe der inkongruenten Nullpunkte einer doppeltperiodischen Funktion innerhalb ihres Periodenparallelogramms nur um Vielfache von Perioden verschieden ist von der Summe der inkongruenten Unendlichkeitspunkte. Dieser Satz hat sich für die Behandlung derartiger Berührungsprobleme besonders vorteilhaft erwiesen, sodaß die Hoffnung nahe lag, mit seiner Hilfe auch das Problem der sechspunktigen Berührung beim Gelenkviereck erschöpfend behandeln zu können. Wenn dies nicht in vollem Umfange möglich gewesen ist, so liegt der Grund dafür in den Schwierigkeiten, die sich infolge des Grades der Koppelkurve dadurch einstellen, daß die Parameter, für die nach dem Liouvilleschen Satze sechspunktige Berührungen möglich wären, sich in der Form von Sechstelargumenten ergeben, sodaß hierbei besonders die Theorie der allgemeinen Dreiteilungsgleichung eine wichtige Rolle spielt.

Diese Schwierigkeiten konnten aber in einigen speziellen Fällen behoben werden, und es ergaben sich hierbei insofern neue Resultate, als für einige spezielle Gelenkvierecke auf diesem Wege diejenigen Relationen aufgestellt werden konnten, denen die Seiten eines solchen Gelenkvierecks genügen müssen, damit der Ballsche Punkt der zu dem betreffenden Parameter gehörigen Koppellage eine Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente beschreibt.

Das Problem der Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente, das besonders von R. Müller in verschiedenen Arbeiten eingehend behandelt und vor allem für den Fall, daß der Ballsche Punkt auf der Koppel liegt, gelöst worden ist, besitzt, wie schon oben erwähnt wurde, insofern ein besonderes Interesse, als es in engem Zusammenhang mit der Theorie der angenäherten Geradführungen steht. Dieser Zusammenhang möge hier kurz angedeutet werden.

Die Geradführungen, die durch Gelenkmechanismen erzeugt werden, können zunächst sogenannte exakte Geradführungen sein, wie z. B. die bekannte durch den Inversor von Peaucellier bewirkte Geradführung, bei denen also der geradgeführte Punkt mit mathematischer Genauigkeit während der vollständigen Be-

wegung des Gelenkmechanismus eine gerade Linie beschreibt, ohne jede überhaupt nur denkbare Abweichung. Andererseits kann eine Geradführung eine sogenannte angenäherte Geradführung sein, und zwar unterscheidet man nach R. Müller zwei Arten von angenäherten Geradführungen, die n-punktig genaue und die n-punktig angenäherte Geradführung, wobei n in der Regel nicht kleiner als 4 und höchstens gleich dem Grade der jeweiligen Koppelkurve ist.

Eine n-punktig genaue Geradführung entsteht dann, wenn der geradgeführte Punkt — in diesem Falle stets der Ballsche Punkt der betrachteten Systemlage — eine Koppelkurve mit n-punktig berührender Tangente beschreibt, während man unter einer n-punktig angenäherten Geradführung eine solche versteht, bei der ein Punkt der Koppelebene, der dann stets in der näheren Umgebung des Ballschen Punktes liegen muß, eine Koppelkurve derart beschreibt, daß sie auf einer möglichst langen Strecke von einer geraden Linie möglichst wenig nach der einen oder der anderen Seite hin abweicht, sodaß die Koppelkurve an dieser Stelle eine Anzahl dicht aufeinanderfolgender Wendepunkte besitzt und infolgedessen in Wirklichkeit die Gestalt einer langgestreckten Wellenlinie hat, die sich aber dem bloßen Auge mit genügender Genauigkeit als gerade Linie darbietet. Es würde nun eigentlich überflüssig erscheinen, nach solchen angenäherten Geradführungen zu suchen, da man ja die bekannten exakten Geradführungen von Peaucellier, Hart usw. besitzt. Aber diese exakten Geradführungen sind bekanntlich insofern für die Technik weniger gut verwertbar, als sie nur mit Hilfe einer größeren Anzahl von Gliedern (bei Peaucellier z. B. 7) möglich sind, und es ist daher vielfach ausgesprochen worden, daß vor allem vom technischen Standpunkte aus angenäherte Geradführungen, die durch Gelenkvierecke bewirkt werden, den exakten Geradführungen vorzuziehen sind. Daher sind die in der Technik gebräuchlichen bekannteren Geradführungen, wie z. B. die Wattsche, die Evanssche, die Robertssche, die Tschebyscheffsche usw., solche n-punktig angenäherte Geradführungen.

Neben diesen angenäherten Geradführungen sind nun auch die n-punktig — und im besonderen 6-punktig — genauen Geradführungen, die ja im Grunde genommen nichts weiter als n-punktige Berührungen sind, von Interesse, da, wie besonders R. Müller[1] hervorhebt, die für die Technik wichtigeren n-punktig angenäherten Geradführungen immer aus n-punktig genauen Geradführungen oder Berührungen leicht hergeleitet werden können, indem man eine geringe Änderung in den Seitenverhältnissen des Gelenkvierecks und in der Lage des Ballschen Punktes vornimmt, die allerdings nach ganz bestimmten Regeln zu geschehen hat, auf deren nähere Erörterung jedoch hier verzichtet werden kann[1].

[1] Siehe R. Müller, Über die angenäherte Geradführung mit Hilfe eines ebenen Gelenkvierecks, Z. f. M. u. Ph., Bd. 43 (1898), p. 36.

Kapitel I.

Vorbetrachtungen.

§ 1. Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten des Gelenkvierecks.

In dem in nachstehender Figur dargestellten Gelenkviereck **AB***AB* sind die Seiten $\overline{\mathbf{A}A}$, $\overline{AB}$, $\overline{B\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{BA}}$ der Reihe

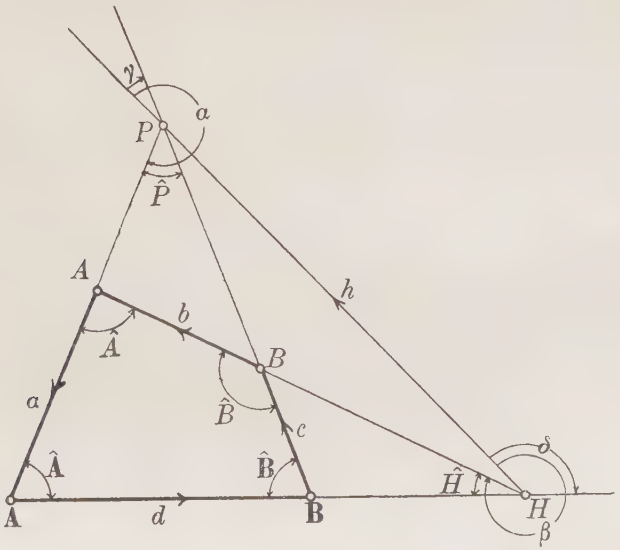

Fig. 1.

nach mit a, b, c, d bezeichnet; es sind also a und c die beiden Arme, b ist die Koppel und d ist der Steg des Gelenkvierecks.

Es ist diese Bezeichnungsweise gewählt worden, damit später die Darstellung der Winkel des Gelenkvierecks als Funktionen eines elliptischen Parameters in der von Darboux angegebenen Form verwendet werden kann. Aus diesem Grunde konnten

wir uns nicht der Bezeichnungsweise $\overline{\mathbf{A}A} = a$, $\overline{\mathbf{B}B} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{\mathbf{AB}} = d$ anschließen, die R. Müller in allen seinen Arbeiten über das Gelenkviereck verwendet, obwohl dadurch die Vergleichung vieler Ergebnisse mit den entsprechenden Müllerschen Resultaten erschwert wird.

Der Pol der Momentanbewegung ist der Schnittpunkt P der beiden Arme $\overline{\mathbf{A}A}$ und $\overline{\mathbf{B}B}$. Verbinden wir diesen mit dem Schnittpunkt H von Koppel und Steg, so entsteht das in der Figur gezeichnete vollständige Vierseit $\mathbf{AB}ABPH$, dessen eine Diagonale $\overline{PH} = h$ ist. Als veränderliche Winkel kommen zunächst naturgemäß die sechs Vierseitswinkel, die von je zwei Seiten des Gelenkvierecks eingeschlossen werden, in Betracht; denn diese sechs Winkel

$$\begin{array}{lll} \angle A\mathbf{AB} = \angle \mathbf{A}, & \angle \mathbf{B}BA = \angle B, & \angle \mathbf{A}P\mathbf{B} = \angle P, \\ \angle \mathbf{AB}B = \angle \mathbf{B}, & \angle BA\mathbf{A} = \angle A, & \angle \mathbf{A}HA = \angle H \end{array}$$

sind es eben, deren Sinus und Kosinus nach Darboux als Funktionen eines einzigen elliptischen Parameters dargestellt werden können.

Andererseits haben aber die Arbeiten von R. Müller gezeigt, daß sich die Winkel, die die Viereckseiten mit der Diagonalen PH bilden, als äußerst zweckmäßig und vorteilhaft für die einfache und elegante Darstellung vieler Eigenschaften des Gelenkvierecks erweisen. Vor allem kommt dies bei der fünf- und sechspunktigen Berührung zur Geltung, da R. Müller mit Hilfe dieser Winkel die betreffenden Bedingungsgleichungen in höchst einfacher Form angeben kann, während sich dieselben mit Hilfe der sechs Vierseitswinkel $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{P}, \hat{H})$ unübersichtlich und schwerfällig gestalten.

Aus diesem Grunde und vor allem auch deshalb, weil diese Winkel bei den sich später notwendig machenden Differentiationen auftreten, sodaß sich ihre Einführung und Verwendung an dieser Stelle von selbst ganz zwanglos ergibt, wollen wir sie gleich von Anfang an mit in unsere Rechnungen einbeziehen und vor allem untersuchen, ob sie sich analog wie die sechs Vierseitswinkel rational mit Hilfe eines elliptischen Parameters darstellen lassen.

Um nun diese Winkel in eindeutiger Weise zu fixieren, wollen wir auf der Diagonalen PH die Richtung von H nach P als positiv wählen, und ebenso sei zu diesem Zwecke den Viereckseiten **AB**, **B***B*, *BA*, *A***A** der durch die Reihenfolge der Buchstaben angedeutete Richtungssinn beigelegt. Dann wollen wir unter Berücksichtigung dieser Richtungsbestimmung die Diagonale HP im Uhrzeigersinn um ihren jeweiligen Schnittpunkt mit einer der Viereckseiten gedreht denken, bis ihre Richtung mit der Richtung der betr. Viereckseite zusammenfällt, und wollen die Winkel, die hiernach die Seiten a, b, c, d mit HP bilden resp. mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$[1] bezeichnen, sodaß also

$$\angle \mathbf{A}PH = \alpha + \pi, \quad \angle \mathbf{B}PH = \gamma,$$
$$\angle AHP = -\beta, \quad \angle \mathbf{A}HP = -\delta + \pi$$

ist.

Zwischen den sechs Vierseitswinkeln und den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestehen dann, wie leicht aus der Figur zu ersehen ist, die Beziehungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\angle \mathbf{A} = \pi - (\alpha - \delta), \ \angle A = \pi + (\alpha - \beta), \ \angle P = \pi - (\gamma - \alpha), \\ &\angle \mathbf{B} = \pi + (\gamma - \delta), \ \angle B = \pi + (\beta - \gamma), \ \angle H = \pi + (\beta - \delta), \end{aligned}$$

während sich zwischen den Seiten a, b, c, d und den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch wiederholte Projektion des Vierecks auf eine der Seiten und eine Senkrechte dazu, bezw. auf die Diagonale HP und ihre Senkrechte, die folgenden Relationen ergeben:

$$(2a)\quad \begin{aligned} &a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma + d\sin\delta = 0, \\ &b\sin(\alpha-\beta) - c\sin(\gamma-\alpha) + d\sin(\alpha-\delta) = 0, \\ &a\sin(\alpha-\beta) - c\sin(\beta-\gamma) - d\sin(\beta-\delta) = 0, \\ &a\sin(\gamma-\alpha) - b\sin(\beta-\gamma) + d\sin(\gamma-\delta) = 0, \\ &a\sin(\alpha-\delta) + b\sin(\beta-\delta) + c\sin(\gamma-\delta) = 0, \end{aligned}$$

und

[1] Hiernach entsprechen also unsere Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht denjenigen Winkeln, die R. Müller in allen seinen Arbeiten mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnet; vielmehr entsprechen nach unserer Festsetzung, die wir im Interesse der Symmetrie und Konsequenz gemacht haben, den Müllerschen Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bei uns immer die Winkel $\gamma, \alpha + \pi, -\beta, -\delta + \pi$.

$$
\begin{array}{ll}
 & a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + d\cos\delta = 0,\\
 & a + b\cos(\alpha-\beta) + c\cos(\gamma-\alpha) + d\cos(\alpha-\delta) = 0,\\
(2\,b) & a\cos(\alpha-\beta) + b + c\cos(\beta-\gamma) + d\cos(\beta-\delta) = 0,\\
 & a\cos(\gamma-\alpha) + b\cos(\beta-\gamma) + c + d\cos(\gamma-\delta) = 0,\\
 & a\cos(\alpha-\delta) + b\cos(\beta-\delta) + c\cos(\gamma-\delta) + d = 0.
\end{array}
$$

Aus je zwei entsprechenden Gleichungen dieser Formelgruppen folgen die für die Einführung der elliptischen Funktionen wichtigen Beziehungen:

$$
\begin{array}{ll}
 & a^2 + 2ad\cos(\alpha-\delta) + d^2 = b^2 + 2bc\cos(\beta-\gamma) + c^2,\\
(3) & b^2 + 2bd\cos(\beta-\delta) + d^2 = c^2 + 2ca\cos(\gamma-\alpha) + a^2,\\
 & c^2 + 2cd\cos(\gamma-\delta) + d^2 = a^2 + 2ab\cos(\alpha-\beta) + b^2.
\end{array}
$$

Zur Abkürzung wollen wir nunmehr für die Sinus und Kosinus der Differenzen der Winkel α, β, γ, δ die folgende Schreibweise verwenden:

$$
\begin{array}{ll}
\sin(\alpha-\beta) = S_{12}, & \cos(\alpha-\beta) = C_{12},\\
\sin(\beta-\gamma) = S_{23}, & \cos(\beta-\gamma) = C_{23},\\
\sin(\gamma-\alpha) = S_{31}, & \cos(\gamma-\alpha) = C_{31},\\
\sin(\alpha-\delta) = S_{14}, & \cos(\alpha-\delta) = C_{14},\\
\sin(\beta-\delta) = S_{24}, & \cos(\beta-\delta) = C_{24},\\
\sin(\gamma-\delta) = S_{34}, & \cos(\gamma-\delta) = C_{34},
\end{array}
\qquad (4)
$$

sodaß also

$$
\begin{array}{ll}
\sin\hat{\mathbf{A}} = S_{14}, & \cos\hat{\mathbf{A}} = -C_{14},\\
\sin\hat{\mathbf{B}} = -S_{34}, & \cos\hat{\mathbf{B}} = -C_{34},\\
\sin\hat{A} = -S_{12}, & \cos\hat{A} = -C_{12},\\
\sin\hat{B} = -S_{23}, & \cos\hat{B} = -C_{23},\\
\sin\hat{P} = S_{31}, & \cos\hat{P} = -C_{31},\\
\sin\hat{H} = -S_{24}, & \cos\hat{H} = -C_{24}
\end{array}
\qquad (5)
$$

ist. Zwischen diesen 12 Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ bestehen nun aus goniometrischen Gründen eine große Anzahl identischer Gleichungen, von denen wir hier einige anführen wollen, deren Kenntnis für später auszuführende Rechnungen und Umformungen von Vorteil ist. Zunächst ist klar, daß die Vertauschung der Indizes bei $S_{m,n}$ einen Zeichenwechsel zur Folge hat, dagegen bei $C_{m,n}$ nicht, daß also

$$S_{m,n} = -S_{n,m}; \quad C_{m,n} = C_{n,m} \tag{6}$$

ist. Ferner erhält man ohne weiteres die Beziehungen:

$$\begin{aligned} S_{12}S_{34} + S_{23}S_{14} + S_{31}S_{24} &= 0, \\ C_{12}S_{34} + C_{14}S_{23} - C_{31}S_{24} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

und analoge Relationen durch Vertauschung der Indizes. Ebenso lassen sich z. B. die folgenden identischen Gleichungen leicht verifizieren, bei denen außer den Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ auch die Sinus und Kosinus der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ selbst vorkommen, die wir hier vorübergehend mit S_m und C_m $(m = 1, 2, 3, 4)$ bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} S_{23}C_1 + S_{31}C_2 + S_{12}C_3 &= 0, \\ S_{23}S_1 + S_{31}S_2 + S_{12}S_3 &= 0, \\ C_{14}S_2 - C_{12}S_4 - S_{24}C_1 &= 0, \\ C_{31}S_2 - C_{12}S_3 - S_{23}C_1 &= 0, \\ C_{14}S_3 - C_{31}S_4 - S_{34}C_1 &= 0; \end{aligned} \tag{8}$$

auch hier ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Indizes zu jeder Relation drei weitere.

Im folgenden soll nunmehr versucht werden, die trigonometrischen Funktionen der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch die Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ auszudrücken, und zwar wenn möglich rational, da ja diese Größen ihrerseits, wie schon oben erwähnt wurde, mit Hilfe eines elliptischen Parameters rational dargestellt werden können. Zu diesem Zwecke entnehmen wir zunächst aus Figur (1) die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \quad a\frac{S_{12}}{S_{24}}, & \overline{BH} &= \quad c\frac{S_{34}}{S_{24}}, \\ \overline{AH} &= -a\frac{S_{14}}{S_{24}}, & \overline{BH} &= \quad c\frac{S_{23}}{S_{24}}, \\ \overline{AP} &= -b\frac{S_{23}}{S_{31}}, & \overline{BP} &= \quad d\frac{S_{14}}{S_{31}}, \\ \overline{BP} &= -b\frac{S_{12}}{S_{31}}, & \overline{AP} &= -d\frac{S_{34}}{S_{31}}, \end{aligned} \tag{9}$$

und

$$\begin{aligned} h\sin\alpha &= -a\frac{S_{12}S_{14}}{S_{24}}, & h\sin\beta &= -b\frac{S_{12}S_{23}}{S_{31}}, \\ h\sin\gamma &= -c\frac{S_{23}S_{34}}{S_{24}}, & h\sin\delta &= -d\frac{S_{14}S_{34}}{S_{31}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Hieraus folgt

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} &= \frac{a}{b}\,\frac{S_{31}S_{14}}{S_{23}S_{24}}, & \frac{\sin\alpha}{\sin\delta} &= \frac{a}{d}\,\frac{S_{12}S_{31}}{S_{24}S_{34}},\\ \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} &= \frac{b}{c}\,\frac{S_{12}S_{24}}{S_{31}S_{34}}, & \frac{\sin\beta}{\sin\delta} &= \frac{b}{d}\,\frac{S_{12}S_{23}}{S_{14}S_{34}},\\ \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} &= \frac{c}{a}\,\frac{S_{23}S_{34}}{S_{12}S_{14}}, & \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} &= \frac{c}{d}\,\frac{S_{23}S_{31}}{S_{14}S_{24}} \end{aligned}$$

und infolgedessen

$$(12)\qquad \begin{aligned} \sin\alpha &= \varrho\, a S_{12}S_{31}S_{14}, & \sin\beta &= \varrho\, b S_{12}S_{23}S_{24},\\ \sin\gamma &= \varrho\, c S_{23}S_{31}S_{34}, & \sin\delta &= \varrho\, d S_{14}S_{24}S_{34}, \end{aligned}$$

wobei ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist, der den Wert

$$\varrho = -\frac{1}{h S_{31} S_{24}}$$

besitzt. Man findet also, daß die Sinus der Winkel α, β, γ, δ nur dann rational durch die Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ und infolgedessen rational durch elliptische Funktionen dargestellt werden können, wenn dies auch für ϱ resp. h der Fall ist.

Aus der Figur (1) folgt nun weiter, daß

$$(13)\qquad h = \begin{cases} c\,\dfrac{S_{34}}{S_{24}}\cos\beta - b\,\dfrac{S_{12}}{S_{31}}\cos\gamma,\\ b\,\dfrac{S_{23}}{S_{31}}\cos\alpha - a\,\dfrac{S_{14}}{S_{24}}\cos\beta,\\ d\,\dfrac{S_{34}}{S_{31}}\cos\alpha - a\,\dfrac{S_{12}}{S_{24}}\cos\delta,\\ d\,\dfrac{S_{14}}{S_{31}}\cos\gamma - c\,\dfrac{S_{23}}{S_{24}}\cos\delta, \end{cases}$$

ist, d. h.

$$(14)\qquad \frac{1}{\varrho} = \begin{cases} c S_{31}S_{34}\cos\beta - b S_{12}S_{24}\cos\gamma,\\ b S_{23}S_{24}\cos\alpha - a S_{31}S_{14}\cos\beta,\\ d S_{24}S_{34}\cos\alpha - a S_{12}S_{31}\cos\delta,\\ d S_{14}S_{24}\cos\gamma - c S_{23}S_{31}\cos\delta. \end{cases}$$

Diese Darstellung von ϱ enthält aber noch die Kosinus der Winkel α, β, γ, δ, kann uns also keinen Aufschluß über die

Rationalität von ϱ geben. Mit Hilfe des Kosinussatzes erhält man schließlich

$$(15)\qquad \frac{1}{\varrho^2} = \begin{cases} b^2 S_{12}^2 S_{24}^2 + c^2 S_{31}^2 S_{34}^2 - 2\,b\,c\,S_{12} S_{31} S_{24} S_{34} C_{23}, \\ a^2 S_{12}^2 S_{31}^2 + d^2 S_{24}^2 S_{34}^2 - 2\,a\,d\,S_{12} S_{31} S_{24} S_{34} C_{14}, \\ a^2 S_{31}^2 S_{14}^2 + b^2 S_{23}^2 S_{24}^2 - 2\,a\,b\,S_{23} S_{31} S_{14} S_{24} C_{12}, \\ c^2 S_{23}^2 S_{31}^2 + d^2 S_{14}^2 S_{24}^2 - 2\,c\,d\,S_{23} S_{31} S_{14} S_{24} C_{34}. \end{cases}$$

Hiernach läßt sich zwar ϱ^2 rational durch die Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ ausdrücken, aber ϱ selbst im allgemeinen nicht, sodaß die Sinus der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ im allgemeinen nicht als rationale Funktionen eines elliptischen Parameters dargestellt werden können. Zur vollständigen Fixierung der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wollen wir noch die Kosinus berechnen. Hierzu eignen sich die folgenden aus der Figur (1) leicht zu entnehmenden Beziehungen:

$$(16\,a)\qquad \begin{aligned} \overline{\mathbf{A}H}\cot\alpha &= -d\cot(\gamma-\alpha) + \overline{\mathbf{B}H}\cot(\alpha-\delta), \\ \overline{BP}\cot\beta &= -c\cot(\beta-\delta) + \overline{\mathbf{B}P}\cot(\beta-\gamma), \\ \overline{BH}\cot\gamma &= -b\cot(\gamma-\alpha) - \overline{AH}\cot(\beta-\gamma), \\ \overline{\mathbf{A}P}\cot\delta &= -a\cot(\beta-\delta) - \overline{AP}\cot(\alpha-\delta), \end{aligned}$$

und

$$(16\,b)\qquad \begin{aligned} \overline{AH}\cot\alpha &= -b\cot(\gamma-\alpha) + \overline{BH}\cot(\alpha-\beta), \\ \overline{AP}\cot\beta &= -a\cot(\beta-\delta) - \overline{\mathbf{A}P}\cot(\alpha-\beta), \\ \overline{\mathbf{B}H}\cot\gamma &= -d\cot(\gamma-\alpha) + \overline{\mathbf{A}H}\cot(\gamma-\delta), \\ \overline{\mathbf{B}P}\cot\delta &= -c\cot(\beta-\delta) - \overline{BP}\cot(\gamma-\delta), \end{aligned}$$

aus denen ohne weiteres unter Benutzung der Gl. (9) und (12) zwei Darstellungen der Kosinus der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ folgen, und zwar:

$$(17\,a)\qquad \begin{aligned} \cos\alpha &= \varrho\,[c\,S_{23} S_{31} C_{14} - d\,S_{14} S_{24} C_{31}], \\ \cos\beta &= \varrho\,[c\,S_{23} S_{31} C_{24} - d\,S_{14} S_{24} C_{23}], \\ \cos\gamma &= \varrho\,[a\,S_{31} S_{14} C_{23} - b\,S_{23} S_{24} C_{31}], \\ \cos\delta &= \varrho\,[a\,S_{31} S_{14} C_{24} - b\,S_{23} S_{24} C_{14}], \end{aligned}$$

und

$$(17\,b)\qquad \begin{aligned} \cos\alpha &= \varrho\,[b\,S_{12} S_{24} C_{31} - c\,S_{31} S_{34} C_{12}], \\ \cos\beta &= \varrho\,[a\,S_{12} S_{31} C_{24} - d\,S_{24} S_{34} C_{12}], \\ \cos\gamma &= \varrho\,[a\,S_{12} S_{31} C_{34} - d\,S_{24} S_{34} C_{31}], \\ \cos\delta &= \varrho\,[b\,S_{12} S_{24} C_{34} - c\,S_{31} S_{34} C_{24}], \end{aligned}$$

wobei ϱ der schon bei den Sinus verwendete, im allgemeinen irrationale Proportionalitätsfaktor ist. Diese beiden Darstellungen lassen sich leicht vermöge der identischen Beziehungen (6) bis (8) in einander überführen.

Aus den Gl. (12) und (17) folgt aber nun, daß wenigstens die trigonometrischen Tangenten und Kotangenten der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rational durch die Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ und mithin auch rational als Funktionen eines elliptischen Parameters darstellbar sind, da sich ja dann der Proportionalitätsfaktor ϱ forthebt, und zwar ergeben sich für die Kotangenten von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vermöge der doppelten Darstellung der Kosinus die folgenden Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
\cot\alpha &= \frac{cS_{23}S_{31}C_{14} - dS_{14}S_{24}C_{21}}{aS_{12}S_{31}S_{14}} = \frac{bS_{12}S_{24}C_{31} - cS_{31}S_{34}C_{12}}{aS_{12}S_{31}S_{14}},\\
\cot\beta &= \frac{cS_{23}S_{31}C_{24} - dS_{14}S_{21}C_{23}}{bS_{12}S_{23}S_{24}} = \frac{aS_{12}S_{31}C_{24} - dS_{24}S_{34}C_{12}}{bS_{12}S_{23}S_{24}},\\
\cot\gamma &= \frac{aS_{31}S_{14}C_{23} - bS_{23}S_{24}C_{31}}{cS_{23}S_{31}S_{34}} = \frac{aS_{12}S_{31}C_{34} - dS_{24}S_{34}C_{31}}{cS_{23}S_{31}S_{34}},\\
\cot\delta &= \frac{aS_{31}S_{14}C_{24} - bS_{23}S_{24}C_{14}}{dS_{14}S_{24}S_{34}} = \frac{bS_{12}S_{24}C_{34} - cS_{31}S_{34}C_{24}}{dS_{14}S_{24}S_{34}}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Das Resultat unserer bisherigen Betrachtungen in bezug auf die Darstellung der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ läßt sich daher folgendermaßen zusammenfassen:

Die tan und cot der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lassen sich rational durch die Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ und mithin als rationale Funktionen eines elliptischen Parameters darstellen, da dies für diese Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ der Fall ist; die sin und cos dagegen nur mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors, der im allgemeinen nicht rational ist.

§ 2. Die Darboux'sche Darstellung der Winkel des Gelenkvierecks als Funktionen eines elliptischen Parameters.

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, ist die erste und grundlegende Arbeit in bezug auf die Anwendung der

elliptischen Funktionen auf kinematische Probleme und insbesondere auf die Theorie des ebenen Gelenkvierecks von Darboux[1] im Jahre 1879 geliefert worden, indem er in seiner diesbezüglichen Arbeit zwei Darstellungen der für das ebene Gelenkviereck wesentlichen Winkel mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen gibt, während erst bedeutend später (1901 und 1904) für spezielle Fälle des Gelenkvierecks, für das zentrische und exzentrische Schubkurbelgetriebe, von Lacour[2] und M. Krause[3] die entsprechenden Formeln angegeben worden sind, nachdem kurz vorher (1900) Picciati[4] auch auf die Verwendung der Weierstraßschen elliptischen Funktionen auf Probleme der Kinematik und insbesondere für das Gelenkviereck hingewiesen hatte. In einer späteren Arbeit hat schließlich M. Krause[5] die Darbouxsche Darstellung mittels ϑ-Funktionen dritter Ordnung hergeleitet.

Auf Grund dieser Arbeiten, in denen vor allem die prinzipielle Frage der Verwendbarkeit der elliptischen Funktionen auf Probleme der Kinematik behandelt wird, sind in den letzten Jahren verschiedene solche Probleme mit Hilfe von elliptischen Funktionen untersucht worden, und zwar besonders aus der Theorie der Rollkurven sowie der einfachen und übergeschlossenen Gelenkmechanismen.

Ein reines Rollkurvenproblem behandelt u. a. Opitz[6]; ein Problem aus der Theorie der Gelenkmechanismen und im Zu-

---

[1] Darboux, De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan; Bulletin des Sciences math. et astron., II. série, Bd. III (1879), p. 109ff. oder Comptes Rendus 88.

[2] Lacour, Mouvement d'un plan invariablement lié à une bielle; Nouv. Annales, sér. IV, Bd. 1.

[3] M. Krause, Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Kurbelbewegung; Berichte der math.-phys. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften zu Leipzig, 1904, p. 273ff.

[4] Picciati, La funzione di Weierstrass nella cinematica del quadrilatero articolato; Atti del' Ist. Veneto 60, Ser. 8, 3. Bd., 2. Teil 1900—1901.

[5] M. Krause, Zur Theorie der Gelenksysteme, Berichte der math.-phys. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch., Leipzig, I, 1907; II, 1908.

[6] Opitz, Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem aus der Theorie der Rollkurven, Inaug.-Diss. Rostock, Dresden 1904.

sammenhang damit die höheren Gerad- und Kreisführungen löst Weisse[1] mit Hilfe der elliptischen Funktionen, eine Anwendung derselben Funktionen auf Peaucelliers Inversor und die damit zusammenhängenden Schließungsprobleme gibt Emch[2], während Bolduan[3] und Bleicher[4] die angedeuteten Darbouxschen Darstellungen dazu benutzen, um eine größere Anzahl übergeschlossener Mechanismen in einheitlicher und abgeschlossener Weise zu untersuchen. Die Arbeit von Bleicher schließt sich an die genannten Arbeiten von Krause aus den Jahren 1907 und 1908 an.

Wie nun in den zitierten Aufsätzen von Krause, Bolduan und Bleicher, so ist auch für die folgenden Untersuchungen, wie bereits mehrfach hervorgehoben worden ist, die Darbouxsche Darstellung der Winkel eines ebenen Gelenkvierecks als Grundlage anzusehen. Da die Herleitung der betreffenden Formeln in den genannten Arbeiten in genügender Weise erfolgt ist, können wir uns im wesentlichen auf die Wiedergabe der Darbouxschen Darstellung in ihren verschiedenen Formen beschränken und werden daher nur insoweit auf die Ableitung und innere Begründung näher eingehen, als uns dies für das Verständnis und für die späteren Rechnungen notwendig und vorteilhaft erscheint.

Um zu einer reellen Darstellung zu gelangen, d. h. damit der Modul der elliptischen Funktionen positiv und kleiner als 1 ist, unterwirft Darboux die Seiten a, b, c, d des Gelenkvierecks zunächst gewissen Einschränkungen, und zwar setzt er voraus, daß

(1a) $$a \geqq b \geqq c \geqq d$$

und

(1b) $$a + d < b + c$$

---

[1] Weisse, Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem aus der Theorie der Gelenkmechanismen, Rostock. Inaug.-Diss., Dresden 1907.

[2] Emch, Kinematische Gelenksysteme und die durch sie erzeugten geometrischen Transformationen, Solothurn, 1906/1907.

[3] Bolduan, Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenkmechanismen, Hall. Inaug.-Diss., Halle 1908.

[4] Bleicher, Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenksysteme, Rostock. Inaug.-Diss., Weida 1910.

ist. Aber Darboux selbst und vor allem auch Bolduan weist darauf hin, daß diese Einschränkung nur eine formale, vorläufige sein kann, um überhaupt zunächst einmal für einen bestimmten Fall eine reelle Darstellung geben zu können, und daß durch geeignete Transformationen der elliptischen Funktionen die Darstellung so gestaltet werden kann, daß sie auch unter anderen Voraussetzungen und Bedingungen verwendet werden kann. Aus diesem Grunde wird man ohne Rücksicht auf die ursprünglich gemachten Annahmen eine einzige Darstellung auch für solche Fälle benützen können, die den oben angegebenen Bedingungen zunächst zuwiderlaufen, und vor allem werden Resultate, die nur bedingungsweise gelten, nicht hinfällig werden, wenn auch die betr. Bedingungsgleichungen den ursprünglich gemachten Einschränkungen widersprechen. Nur solche Resultate, bei denen sich als Bedingung $\varkappa^2 = 1$ oder $\varkappa^2 = 0$ ergeben würde, können hiernach nicht ohne weiteres als gültig angesehen werden, da dann die elliptischen Funktionen in trigonometrische ausarten und sich für solche Fälle eine gesonderte Untersuchung ohne elliptische Funktionen nötig machen würde.

Die zur Einführung der elliptischen Funktionen dienenden Gleichungen (3) auf pag. 16 können folgendermaßen geschrieben werden:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \cos(\beta-\gamma) &= M_1 \cos(\alpha-\delta) + N_1, \\ \cos(\gamma-\alpha) &= M_2 \cos(\beta-\delta) + N_2, \\ \cos(\alpha-\beta) &= M_3 \cos(\gamma-\delta) + N_3, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$M_1 = \frac{ad}{bc}, \qquad N_1 = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2bc},$$

$$M_2 = \frac{bd}{ac}, \qquad N_2 = \frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2ac},$$

$$M_3 = \frac{cd}{ab}, \qquad N_3 = \frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2ab}.$$

Die entsprechenden Gleichungen finden sich bei Bolduan (p. 13) in der Form

$$(2^*)\qquad \begin{aligned} \cos(w_2 - w_3) &= M_1 \cos w_1 + N_1, \\ \cos(w_3 - w_1) &= M_2 \cos w_2 + N_2, \\ \cos(w_1 - w_2) &= M_3 \cos w_3 + N_3, \end{aligned}$$

wobei w_1, w_2, w_3 diejenigen auch von Darboux benutzten Winkel bedeuten, die die drei beweglichen Glieder a, b, c des Gelenkvierecks mit dem festen Gliede d bilden, also im wesentlichen mit unseren Winkeln $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{H}$ übereinstimmen. Aus (2) und (2*) ersieht man aber, daß den Winkeln w_1, w_2, w_3 direkt die Winkeldifferenzen $\alpha-\delta$, $\beta-\delta$, $\gamma-\delta$ entsprechen und infolgedessen die Beziehungen bestehen:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha-\delta, & w_2 &= \beta-\delta, & w_3 &= \gamma-\delta, \\ w_1 - w_2 &= \alpha-\beta, & w_2 - w_3 &= \beta-\gamma, & w_3 - w_1 &= \gamma-\alpha. \end{aligned}$$

Wir können daher die Darbouxsche Darstellung ohne weiteres benutzen, da ja hiernach unsere Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ gleich den Sinus und Kosinus der Winkel w_1, w_2, w_3, w_1-w_2, w_2-w_3, w_3-w_1 sind. Bezeichnen wir mit Θ_1, Θ_2, Θ_3 drei elliptische veränderliche Parameter und mit μ_1, μ_2, μ_3 drei elliptische Konstanten, so nimmt die Darbouxsche Darstellung in unserem Falle für die Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ die Form an:

$$(3)\qquad \begin{aligned} S_{14} &= \frac{2\,dn\,\mu_1\,sn\,\Theta_1\,cn\,\Theta_1}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_1\,sn^2\Theta_1}, & C_{14} &= \frac{dn^2\mu_1\,sn^2\Theta_1 - cn^2\Theta_1}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_1\,sn^2\Theta_1}, \\ S_{23} &= -\frac{2\,sn\,\mu_1\,cn\,\mu_1\,dn\,\Theta_1}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_1\,sn^2\Theta_1}, & C_{23} &= \frac{cn^2\mu_1 - sn^2\mu_1\,dn^2\Theta_1}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_1\,sn^2\Theta_1}, \\ S_{24} &= \frac{2\,dn\,\mu_2\,sn\,\Theta_2\,cn\,\Theta_2}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_2\,sn^2\Theta_2}, & C_{24} &= \frac{dn^2\mu_2\,sn^2\Theta_2 - cn^2\Theta_2}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_2\,sn^2\Theta_2}, \\ S_{31} &= -\frac{2\,sn\,\mu_2\,cn\,\mu_2\,dn\,\Theta_2}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_2\,sn^2\Theta_2}, & C_{31} &= \frac{cn^2\mu_2 - sn^2\mu_2\,dn^2\Theta_2}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_2\,sn^2\Theta_2}, \\ S_{34} &= \frac{2\,dn\,\mu_3\,sn\,\Theta_3\,cn\,\Theta_3}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_3\,sn^2\Theta_3}, & C_{34} &= \frac{dn^2\mu_3\,sn^2\Theta_3 - cn^2\Theta_3}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_3\,sn^2\Theta_3}, \\ S_{12} &= -\frac{2\,sn\,\mu_3\,cn\,\mu_3\,dn\,\Theta_3}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_3\,sn^2\Theta_3}, & C_{12} &= \frac{cn^2\mu_3 - sn^2\mu_3\,dn^2\Theta_3}{1-\varkappa^2 sn^2\mu_3\,sn^2\Theta_3}. \end{aligned}$$

Hierbei ist der Modul der elliptischen Funktionen bestimmt durch

$$(4)\qquad \varkappa^2 = \frac{16\,abcd}{q_1 q_2 q_3 q_4}, \qquad \varkappa'^2 = 1-\varkappa^2 = \frac{p_0 p_{12} p_{13}(-p_{14})}{q_1 q_2 q_3 q_4},$$

wenn q_1, q_2, q_3, q_4, p_0, p_{12}, p_{13}, p_{14} die schon von Darboux eingeführten Abkürzungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} q_1 &= -a+b+c+d, & p_0 &= a+b+c+d,\\ q_2 &= a-b+c+d, & p_{12} &= a+b-c-d,\\ q_3 &= a+b-c+d, & p_{13} &= a-b+c-d,\\ q_4 &= a+b+c-d, & p_{14} &= a-b-c+d \end{aligned}$$

bedeuten, die der identischen Gleichung

$$(6)\qquad q_1 q_2 q_3 q_4 + p_0 p_{12} p_{13} p_{14} = 16abcd$$

Genüge leisten.

Die elliptischen Konstanten μ_1, μ_2, μ_3 sind mit den Seiten a, b, c, d des Gelenkvierecks durch die folgenden Formeln verknüpft:

$$(7)\qquad \begin{aligned} sn\,\mu_1 &= +\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{q_1 q_4}{bc}}, & cn\,\mu_1 &= +\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{p_{12}p_{13}}{bc}}, & dn\,\mu_1 &= +\sqrt{\tfrac{p_{12}p_{13}}{q_2 q_3}},\\ sn\,\mu_2 &= +\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{q_2 q_4}{ac}}, & cn\,\mu_2 &= +\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{p_{12}(-p_{14})}{ac}}, & dn\,\mu_2 &= +\sqrt{\tfrac{p_{12}(-p_{14})}{q_1 q_3}},\\ sn\,\mu_3 &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{q_3 q_4}{ab}}, & cn\,\mu_3 &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{p_{13}(-p_{14})}{ab}}, & dn\,\mu_3 &= +\sqrt{\tfrac{p_{13}(-p_{14})}{q_1 q_2}}, \end{aligned}$$

wobei die Vorzeichen vor den Quadratwurzeln so gewählt worden sind, daß

$$(8)\qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$$

ist. Bei dieser Zeichenfestsetzung ergeben sich dann für die elliptischen Funktionen der doppelten Konstanten $2\mu_1$ die Werte:

$$(9)\quad sn\,2\mu_1 = \frac{\sqrt{q_1 q_2 q_3 q_4}}{2(bc+ad)},\quad cn\,2\mu_1 = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(bc+ad)},\quad dn\,2\mu_1 = \frac{bc-ad}{bc+ad},$$

und für $2\mu_2$ und $2\mu_3$ analoge Werte durch zyklische Vertauschung der Buchstaben a, b, c. Ferner ist

$$(10)\qquad \begin{aligned} sn\,3\mu_1 &= \frac{b^2c^2-a^2d^2+bc(a^2+d^2-b^2-c^2)}{b^2c^2-a^2d^2+ad(a^2+d^2-b^2-c^2)}\,sn\,\mu_1,\\ cn\,3\mu_1 &= -\frac{b^2c^2-a^2d^2-bc(a^2+d^2-b^2-c^2)}{b^2c^2-a^2d^2+ad(a^2+d^2-b^2-c^2)}\,cn\,\mu_1,\\ dn\,3\mu_1 &= \frac{b^2c^2-a^2d^2-ad(a^2+d^2-b^2-c^2)}{b^2c^2-a^2d^2+ad(a^2+d^2-b^2-c^2)}\,dn\,\mu_1, \end{aligned}$$

(die entsprechenden Formeln für $3\mu_2$ und $3\mu_3$ wieder durch zyklische Vertauschung von a, b, c) und schließlich

$$
\begin{aligned}
&sn(\mu_1-\mu_2)=\frac{a-b}{c-d}\,sn\,\mu_3, \quad cn(\mu_1-\mu_2)=-\frac{a+b}{c-d}\,cn\,\mu_3,\\
&sn(\mu_2-\mu_3)=\frac{b-c}{a-d}\,sn\,\mu_1, \quad cn(\mu_2-\mu_3)=-\frac{b+c}{a-d}\,cn\,\mu_1,\\
&sn(\mu_3-\mu_1)=\frac{c-a}{b-d}\,sn\,\mu_2, \quad cn(\mu_3-\mu_1)=-\frac{c+a}{b-d}\,cn\,\mu_2,\\
&dn(\mu_1-\mu_2)=\frac{c+d}{c-d}\,dn\,\mu_3,\\
&dn(\mu_2-\mu_3)=\frac{a+d}{a-d}\,dn\,\mu_1,\\
&dn(\mu_3-\mu_1)=\frac{b+d}{b-d}\,dn\,\mu_2.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Aus den Gleichungen (7) folgen endlich noch die Konstantenbeziehungen[1]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dn^2\mu_1}{sn^2\mu_1\,cn^2\mu_1}=\varkappa^2\frac{bc}{ad}, \qquad \frac{sn\,\mu_1\,cn\,\mu_1\,dn\,\mu_2}{sn\,\mu_2\,cn\,\mu_2\,dn\,\mu_1}=\frac{a}{b},\\
&\frac{dn^2\mu_2}{sn^2\mu_2\,cn^2\mu_2}=\varkappa^2\frac{ac}{bd}, \qquad \frac{sn\,\mu_2\,cn\,\mu_2\,dn\,\mu_3}{sn\,\mu_3\,cn\,\mu_3\,dn\,\mu_2}=\frac{b}{c},\\
&\frac{dn^2\mu_3}{sn^2\mu_3\,cn^2\mu_3}=\varkappa^2\frac{ab}{cd}, \qquad \frac{sn\,\mu_3\,cn\,\mu_3\,dn\,\mu_1}{sn\,\mu_1\,cn\,\mu_1\,dn\,\mu_3}=\frac{c}{a},\\
&\frac{dn\,\mu_1\,dn\,\mu_2}{sn\,\mu_1\,cn\,\mu_1\,sn\,\mu_2\,cn\,\mu_2}=\varkappa^2\frac{c}{d},\\
&\frac{dn\,\mu_2\,dn\,\mu_3}{sn\,\mu_2\,cn\,\mu_2\,sn\,\mu_3\,cn\,\mu_3}=\varkappa^2\frac{a}{d},\\
&\frac{dn\,\mu_1\,dn\,\mu_3}{sn\,\mu_1\,cn\,\mu_1\,sn\,\mu_3\,cn\,\mu_3}=\varkappa^2\frac{b}{d}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Es kann nun leicht nachgewiesen werden, daß die drei elliptischen Parameter Θ_1, Θ_2, Θ_3 nicht unabhängig voneinander sind; vielmehr bestehen zwischen ihnen und den Konstanten μ_1, μ_2, μ_3 die einfachen Relationen:

$$\Theta_1+\mu_1=\Theta_2-\mu_2, \quad \Theta_2+\mu_2=\Theta_3-\mu_3, \quad \Theta_3+\mu_3=\Theta_1-\mu_1,$$

[1] Vergl. auch M. Krause, Zur Theorie der Gelenksysteme, Sächs. Berichte, 1907.

die unter Berücksichtigung der Gleichung (8) geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} \Theta_1 - \Theta_2 &= -(\mu_1 + \mu_2) = \mu_3, \\ \Theta_2 - \Theta_3 &= -(\mu_2 + \mu_3) = \mu_1, \\ \Theta_3 - \Theta_1 &= -(\mu_3 + \mu_1) = \mu_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Differenzen der drei elliptischen Parameter Θ_1, Θ_2, Θ_3 sind also konstante Größen, deren Summe gleich 0 ist.

Die Beziehungen (13) geben uns nun die Möglichkeit, einen der drei Parameter als einzigen zu wählen und vor allem die Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ von einem einzigen Parameter abhängig darzustellen, was ja für die analytische Behandlung unserer kinematischen Probleme von wesentlicher Bedeutung ist.

Bevor wir aber die hierauf bezügliche Darstellung mittels eines einzigen Parameters angeben können, muß erwähnt werden, daß die erste in den Gleichungen (3) wiedergegebene Darstellung eine äußerst einfache Schreibweise zuläßt, wenn man von den aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannten Formeln

$$cn(\Theta+\mu)\,cn(\Theta-\mu) = \frac{cn^2\Theta - sn^2\mu\,dn^2\Theta}{1 - x^2 sn^2\mu\,sn^2\Theta} = \frac{cn^2\mu - sn^2\Theta\,dn^2\mu}{1 - x^2 sn^2\mu\,sn^2\Theta},$$

$$sn(\Theta+\mu)\,sn(\Theta-\mu) = \frac{cn^2\mu - cn^2\Theta}{1 - x^2 sn^2\mu\,sn^2\Theta} = \frac{sn^2\mu\,dn^2\Theta - sn^2\Theta\,dn^2\mu}{1 - x^2 sn^2\mu\,sn^2\Theta},$$

$$sn(\Theta+\mu)\,cn(\Theta-\mu) = \frac{sn\Theta\,cn\Theta\,dn\mu + sn\mu\,cn\mu\,dn\Theta}{1 - x^2 sn^2\mu\,sn^2\Theta},$$

$$sn(\Theta-\mu)\,cn(\Theta+\mu) = \frac{sn\Theta\,cn\Theta\,dn\mu - sn\mu\,cn\mu\,dn\Theta}{1 - x^2 sn^2\mu\,sn^2\Theta}$$

Gebrauch macht; denn dann folgt ohne weiteres aus den Gleichungen (3) z. B.:

$$\begin{aligned} S_{14} + S_{23} &= 2\,sn(\Theta_1 - \mu_2)\,cn(\Theta_1 + \mu_1), \\ S_{14} - S_{23} &= 2\,sn(\Theta_1 + \mu_1)\,cn(\Theta_1 - \mu_1), \\ C_{14} + C_{23} &= 2\,sn(\Theta_1 + \mu_1)\,sn(\Theta_1 - \mu_1), \\ C_{14} - C_{23} &= -2\,cn(\Theta_1 + \mu_1)\,cn(\Theta_1 - \mu_1) \end{aligned}$$

usw., und infolgedessen, wenn man zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
&\Theta_2 + \mu_2 = \Theta_3 - \mu_3 \equiv \omega_1, \\
&\Theta_3 + \mu_3 = \Theta_1 - \mu_1 \equiv \omega_2, \\
&\Theta_1 + \mu_1 = \Theta_2 - \mu_2 \equiv \omega_3
\end{aligned} \tag{14}
$$

setzt,

$$
\begin{aligned}
S_{14} &= \sin[am\omega_2 + am\omega_3], & C_{14} &= -\cos[am\omega_2 + am\omega_3], \\
S_{23} &= \sin[am\omega_2 - am\omega_3], & C_{23} &= \cos[am\omega_2 - am\omega_3], \\
S_{24} &= \sin[am\omega_3 + am\omega_1], & C_{24} &= -\cos[am\omega_3 + am\omega_1], \\
S_{31} &= \sin[am\omega_3 - am\omega_1], & C_{31} &= \cos[am\omega_3 - am\omega_1], \\
S_{34} &= \sin[am\omega_1 + am\omega_2], & C_{34} &= -\cos[am\omega_1 + am\omega_2], \\
S_{12} &= \sin[am\omega_1 - am\omega_2], & C_{12} &= \cos[am\omega_1 - am\omega_2],
\end{aligned} \tag{15}
$$

oder schließlich

$$
\begin{aligned}
\alpha - \beta &= am\omega_1 - am\omega_2, & \gamma - \delta &= \pi - am\omega_1 - am\omega_2, \\
\beta - \gamma &= am\omega_2 - am\omega_3, & \alpha - \delta &= \pi - am\omega_2 - am\omega_3, \\
\gamma - \alpha &= am\omega_3 - am\omega_1, & \beta - \delta &= \pi - am\omega_3 - am\omega_1,
\end{aligned} \tag{16}
$$

sodaß also hiernach die Differenzen der Winkel α, β, γ, δ direkt durch elliptische Amplituden dargestellt werden können.

Auf Grund der Gleichungen (14) und (15) kann man nun leicht eine solche Darstellung angeben, bei der die Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ von einem einzigen elliptischen Parameter abhängen. Wählt man als diesen z. B. Θ_1 und schreibt dafür einfach Θ, so folgt:

$$\Theta_1 = \Theta, \quad \Theta_2 = \Theta - \mu_3, \quad \Theta_3 = \Theta + \mu_2,$$

und infolgedessen

$$\omega_1 = \Theta + \mu_2 - \mu_3, \quad \omega_2 = \Theta - \mu_1, \quad \omega_3 = \Theta + \mu_1,$$

oder wenn man zur Abkürzung $\mu_2 - \mu_3 = \nu$ setzt und für μ_1 einfach μ schreibt:

$$\omega_1 = \Theta + \nu, \quad \omega_2 = \Theta - \mu, \quad \omega_3 = \Theta + \mu.$$

Dann erhält man unter Benutzung des Additionstheorems der elliptischen Funktionen aus (15) eine Darstellung der Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ mittels eines einzigen Parameters, die der von Bolduan auf p. 18 seiner Arbeit angegebenen entspricht, und zwar wird:

$$
\begin{aligned}
S_{14} &= \frac{2\,dn\mu\,sn\Theta\,cn\Theta}{N_1}, & C_{14} &= \frac{dn^2\mu\,sn^2\Theta - cn^2\Theta}{N_1},\\
S_{23} &= -\frac{2\,sn\mu\,cn\mu\,dn\Theta}{N_1}, & C_{23} &= \frac{cn^2\mu - sn^2\mu\,dn^2\Theta}{N_1},\\
S_{24} &= \frac{R_1R_6 + R_2R_5\,dn\Theta}{N_1N_2}, & C_{24} &= \frac{-R_1R_5 + R_2R_6\,dn\Theta}{N_1N_2},\\
S_{31} &= \frac{R_3R_8 - R_4R_7\,dn\Theta}{N_1N_2}, & C_{31} &= \frac{R_3R_7 + R_4R_8\,dn\Theta}{N_1N_2},\\
S_{34} &= \frac{R_3R_6 + R_4R_5\,dn\Theta}{N_1N_2}, & C_{34} &= \frac{-R_3R_5 + R_4R_6\,dn\Theta}{N_1N_2},\\
S_{12} &= \frac{-R_1R_8 + R_2R_7\,dn\Theta}{N_1N_2}, & C_{12} &= \frac{R_1R_7 + R_2R_8\,dn\Theta}{N_1N_2},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

wobei abkürzungsweise gesetzt ist:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= cn\mu\,cn\nu - sn\mu\,sn\nu\,dn^2\Theta, & R_2 &= sn\mu\,cn\nu + cn\mu\,sn\nu,\\
R_3 &= cn\mu\,cn\nu + sn\mu\,sn\nu\,dn^2\Theta, & R_4 &= -sn\mu\,cn\nu + cn\mu\,sn\nu,\\
R_5 &= cn^2\Theta - dn\mu\,dn\nu\,sn^2\Theta, & R_6 &= [dn\mu + dn\nu]\,sn\Theta\,cn\Theta,\\
R_7 &= cn^2\Theta + dn\mu\,dn\nu\,sn^2\Theta, & R_8 &= [dn\mu - dn\nu]\,sn\Theta\,cn\Theta,\\
N_1 &= 1 - \varkappa^2 sn^2\mu\,sn^2\Theta, & N_2 &= 1 - \varkappa^2 sn^2\nu\,sn^2\Theta,
\end{aligned}
\tag{18a}
$$

und zwischen μ und ν nach (11) die Beziehungen bestehen:

$$
sn\nu = \frac{b-c}{a-d}\,sn\mu, \quad cn\nu = -\frac{b+c}{a-d}\,cn\mu, \quad dn\nu = \frac{a+d}{a-d}\,dn\mu. \tag{18b}
$$

Ferner lassen sich leicht die folgenden Relationen herleiten:

$$
R_1^2 + R_2^2\,dn^2\Theta = R_3^2 + R_4^2\,dn^2\Theta = R_5^2 + R_6^2 = R_7^2 + R_8^2 - N_1N_2,
$$

$$
R_1 + R_3 = -\frac{(b+c)p_{12}p_{13}}{2bc(a-d)}, \qquad \frac{R_5 - 1}{R_7 - 1} = \frac{a}{d}\,\frac{(a^2-d^2)-(b-c)^2}{(a^2-d^2)+(b-c)^2}, \tag{19}
$$

$$
\frac{R_2}{R_4} = -\frac{c}{d}, \qquad \frac{R_6}{R_8} = -\frac{a}{d}.
$$

Für die Untersuchung der Unendlichkeitspunkte der Polkurven und der Koppelkurve hat sich schließlich eine dritte Darstellung als äußerst vorteilhaft erwiesen, bei der zwar die drei verschiedenen Parameter beibehalten werden, aber so, daß jeder um die konstante Größe iK' vermindert erscheint[1]. Setzt man

[1] Siehe Bolduan, a. a. O., p. 20.

$$\Theta_1 = \Theta_1' + iK', \quad \Theta_2 = \Theta_2' + iK', \quad \Theta_3 = \Theta_3' + iK',$$

so folgt aus der Darstellung (3) z. B.:

$$S_{14} = -\frac{i}{\varkappa^2}\frac{2\,dn\mu_1\,dn\Theta_1'}{sn^2\Theta_1' - sn^2\mu_1}, \qquad C_{14} = \frac{1}{\varkappa^2}\frac{dn^2\mu_1 + dn^2\Theta_1'}{sn^2\Theta_1' - sn^2\mu_1},$$

$$S_{23} = i\frac{2\,sn\mu_1\,cn\mu_1\,sn\Theta_1'\,cn\Theta_1'}{sn^2\Theta_1' - sn^2\mu_1}, \qquad C_{23} = \frac{cn^2\mu_1\,sn^2\Theta_1' + sn^2\mu_1\,cn^2\Theta_1'}{sn^2\Theta_1' - sn^2\mu_1},$$

(die übrigen mit den entsprechenden Indizes) oder auch

$$S_{14} = -\frac{i}{\varkappa^2}\frac{dn(\Theta_1'+\mu_1) + dn(\Theta_1'-\mu_1)}{sn(\Theta_1'+\mu_1)\,sn(\Theta_1'-\mu_1)}, \quad C_{14} = \frac{1}{\varkappa^2}\frac{1+dn(\Theta_1'+\mu_1)\,dn(\Theta_1'-\mu_1)}{sn(\Theta_1'+\mu_1)\,sn(\Theta_1'-\mu_1)},$$

$$S_{23} = -\frac{i}{\varkappa^2}\frac{dn(\Theta_1'+\mu_1) - dn(\Theta_1'-\mu_1)}{sn(\Theta_1'+\mu_1)\,sn(\Theta_1'-\mu_1)}, \quad C_{23} = \frac{1}{\varkappa^2}\frac{1-dn(\Theta_1'+\mu_1)\,dn(\Theta_1'-\mu_1)}{sn(\Theta_1'+\mu_1)\,sn(\Theta_1'-\mu_1)},$$

oder endlich:

(20a)
$$\begin{aligned}
S_{14} &= -\frac{i}{\varkappa^2}\frac{dnu_2 + dnu_3}{snu_2\,snu_3}, & C_{14} &= \frac{1}{\varkappa^2}\frac{1+dnu_2\,dnu_3}{snu_2\,snu_3},\\
S_{23} &= \frac{i}{\varkappa^2}\frac{dnu_2 - dnu_3}{snu_2\,snu_3}, & C_{23} &= \frac{1}{\varkappa^2}\frac{1-dnu_2\,dnu_3}{snu_2\,snu_3},\\
S_{24} &= -\frac{i}{\varkappa^2}\frac{dnu_3 + dnu_1}{snu_3\,snu_1}, & C_{24} &= \frac{1}{\varkappa^2}\frac{1+dnu_3\,dnu_1}{snu_3\,snu_1},\\
S_{31} &= \frac{i}{\varkappa^2}\frac{dnu_3 - dnu_1}{snu_3\,snu_1}, & C_{31} &= \frac{1}{\varkappa_2}\frac{1-dnu_3\,dnu_1}{snu_3\,snu_1},\\
S_{34} &= -\frac{i}{\varkappa^2}\frac{dnu_1 + dnu_2}{snu_1\,snu_2}, & C_{34} &= \frac{1}{\varkappa^2}\frac{1+dnu_1\,dnu_2}{snu_1\,snu_2},\\
S_{12} &= \frac{i}{\varkappa^2}\frac{dnu_1 - dnu_2}{snu_1\,snu_2}, & C_{12} &= \frac{1}{\varkappa^2}\frac{1-dnu_1\,dnu_2}{snu_1\,snu_2},
\end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

(20b)
$$\begin{aligned}
u_1 &= \Theta + \mu_2 - \mu_3 - iK' = \Theta + \nu - iK',\\
u_2 &= \Theta + \mu_2 + \mu_3 - iK' = \Theta - \mu - iK',\\
u_3 &= \Theta - \mu_2 - \mu_3 - iK' = \Theta + \mu - iK'.
\end{aligned}$$

Hiermit sind nun die Grundlagen gewonnen, auf denen sich die analytische Behandlung der für das Gelenkviereck wichtigen Probleme aufbaut, da wir nunmehr imstande sind, alle Bewegungsvorgänge mit Hilfe eines einzigen elliptischen Parameters zu studieren, der nun allerdings, wie zu vermuten war, nicht mehr eine so einfache Bedeutung besitzt wie die ursprünglich

als Parameter verwendeten Winkel des Gelenkvierecks. Vor allem scheint es nicht möglich zu sein, den Parametern $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ selbst eine greifbare, insbesondere geometrische Bedeutung beizulegen. Dagegen lassen sich die Amplituden

$$\begin{aligned} am\,\omega_1 &= am(\Theta_2 + \mu_2) = am(\Theta_3 - \mu_3), \\ am\,\omega_2 &= am(\Theta_3 + \mu_3) = am(\Theta_1 - \mu_1), \\ am\,\omega_3 &= am(\Theta_1 + \mu_1) = am(\Theta_2 - \mu_2), \end{aligned}$$

die ja ihrem Wesen nach Winkel sind, auf einfache Weise bei einer vorgelegten Koppellage eines Gelenkvierecks konstruieren, und zwar auf Grund der Gleichungen (16), die wir zu diesem Zwecke jetzt besser in der Form

$$\begin{aligned} am\,\omega_1 + am\,\omega_2 &= -\hat{\mathbf{B}} - 2\pi, & am\,\omega_2 + am\,\omega_3 &= \hat{\mathbf{A}}, \\ am\,\omega_1 - am\,\omega_2 &= \hat{A} - \pi, & am\,\omega_2 - am\,\omega_3 &= \hat{B} + \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} am\,\omega_3 + am\,\omega_1 &= -\hat{H}, \\ am\,\omega_3 - am\,\omega_1 &= -\hat{P} - \pi \end{aligned}$$

schreiben; denn dann folgt hieraus

$$\begin{aligned} am\,\omega_1 &= \frac{\hat{A} - \hat{\mathbf{B}}}{2} - \frac{3\pi}{2} = \frac{\hat{P} - \hat{H}}{2} + \frac{\pi}{2}, \\ am\,\omega_2 &= -\frac{\hat{A} + \hat{\mathbf{B}}}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\hat{\mathbf{A}} + \hat{B}}{2} + \frac{\pi}{2}, \\ am\,\omega_3 &= \frac{\hat{\mathbf{A}} - \hat{B}}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\hat{P} + \hat{H}}{2} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Die Möglichkeit der konstruktiven Ermittelung dieser Amplituden erwähnt Bolduan p. 18 nur kurz, ohne auf die Konstruktion selbst näher einzugehen. An sich bietet ja auch die Konstruktion auf Grund der Gleichungen (21) nicht die geringste Schwierigkeit, so daß es sich erübrigen würde, sie besonders anzugeben. Wir wollen aber trotzdem im folgenden eine solche Konstruktion mitteilen, die sich äußerst einfach bei jeder beliebigen Koppellage eines Gelenkvierecks ausführen läßt und die Größen $am\,\omega_1$, $am\,\omega_2$, $am\,\omega_3$ in übersichtlicher und anschaulicher Weise zur Darstellung bringt. Wir benützen zu diesem

Zwecke einen Steinerschen Satz[1] über das vollständige Vierseit, der folgendermaßen lautet:

„Die vier Kreise, die in einem vollständigen Vierseit um die vier in diesem enthaltenen Dreiecke beschrieben werden können, schneiden sich in einem Punkte."

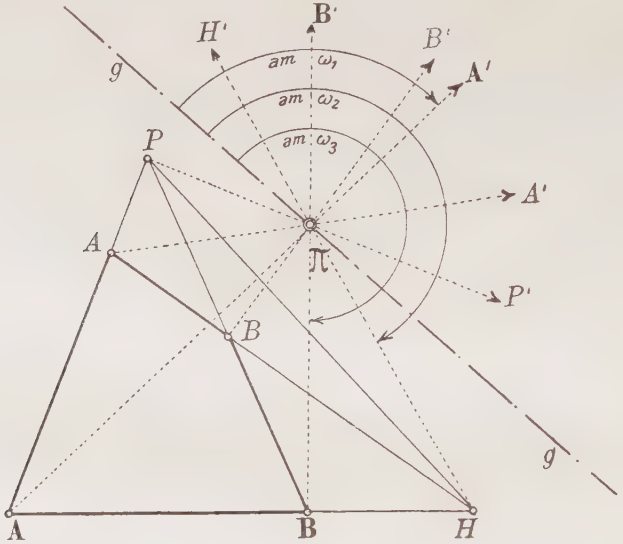

Fig. 2.

In der vorstehenden Figur ist Π der Schnittpunkt dieser vier Kreise. Zieht man dann die Strahlen $\mathbf{A}\Pi\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}\Pi\mathbf{B}'$ usw., so gruppieren sich die sechs Vierseitswinkel in einfacher Weise um den Punkt Π, und zwar ist:

$$\angle\mathbf{A} = \angle P\Pi\mathbf{B}', \quad \angle A = \angle\mathbf{A}\Pi H, \quad \angle P = \angle\mathbf{A}\Pi\mathbf{B} = \angle A\Pi B,$$
$$\angle\mathbf{B} = \angle P\Pi\mathbf{A}, \quad \angle B = \angle\mathbf{B}'\Pi H, \quad \angle H = \angle\mathbf{A}\Pi A = \angle\mathbf{B}\Pi B,$$

[1] Vergl. Simon, Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert, p. 157 u. 158; ferner Gergonne, Ges. Werke, 1, p. 223; Ehlert, Grun. Archiv 69, p. 332; Sporer, Z. f. M. u. Ph. 31, p. 43. Siehe u. a. auch Burmester, Kinematik I, p. 865ff., unter dem Kapitel: „Bewegung ähnlich veränderlicher ebener Systeme."

wobei nun zu bemerken ist, daß die sechs von Π ausgehenden Strahlen symmetrisch liegen in bezug auf die Winkelhalbierende des Winkels $P\hat{\Pi}H$ und ihre Senkrechte g. Beachtet man nunmehr die Gleichungen (21), so ist leicht zu ersehen, daß durch diese Strahlen und die Gerade g die Größen $am\,\omega_1$, $am\,\omega_2$, $am\,\omega_3$ ohne weiteres bestimmt sind, und zwar reicht $am\,\omega_1$ von g bis zum Strahl $\Pi\mathbf{A}'$, $am\,\omega_2$ von g bis ΠH und $am\,\omega_3$ von g bis $\Pi\mathbf{B}$, wie durch die Pfeile in der Figur angedeutet worden ist.

Hiernach sind für jede beliebige Koppellage eines Gelenkvierecks diese Amplituden in eindeutiger Weise bestimmt als gewisse Winkel um den Punkt Π, der natürlich selbst im Verlaufe der Bewegung stetig seinen Ort ändert. Der geometrische Ort aller Punkte Π, die der Gesamtbewegung entsprechen, läßt sich leicht angeben, da $\angle\,\mathbf{A}\Pi\mathbf{B} = \angle\,A\Pi B$ und $\angle\,H\mathbf{A}\Pi = \angle\,BA\Pi$, folglich

$$\triangle\,\mathbf{AB}\Pi \sim \triangle\,AB\Pi$$

und infolgedessen

$$\frac{\mathbf{A}\Pi}{\mathbf{B}\Pi} = \frac{a}{b}$$

ist. Der Punkt Π wandert also auf einem Kreise, der über einer Strecke als Durchmesser beschrieben ist, deren Endpunkte den Steg d innen und außen im Verhältnis der Arme a und c teilen (Apollonius).

Auch die Amplituden der doppelten elliptischen Konstanten $2\mu_1$, $2\mu_2$, $2\mu_3$ lassen sich einfach geometrisch deuten, und zwar ist leicht einzusehen, daß die Winkel $\hat{\mathbf{A}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ gleich $am\,2\mu_1$ und $am\,2\mu_3$ werden, wenn sich das Gelenkviereck in einer solchen Lage befindet, daß sich ein Kreis darum beschreiben läßt: denn aus den allgemein gültigen Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2 - 2ad\cos\hat{\mathbf{A}} + d^2 &= b^2 - 2bc\cos\hat{B} + c^2, \\ b^2 - 2bd\cos\hat{H} + d^2 &= c^2 - 2ac\cos\hat{P} + a^2, \\ c^2 - 2cd\cos\hat{\mathbf{B}} + d^2 &= a^2 - 2ab\cos\hat{A} + b^2 \end{aligned} \tag{22}$$

folgt für $\hat{\mathbf{A}} + \hat{B} = \pi$ und $\hat{\mathbf{B}} + \hat{A} = \pi$

$$\cos \hat{\mathbf{A}} = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(bc + ad)}, \qquad \cos \hat{\mathbf{B}} = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(ab + cd)}.$$

Infolge der Gleichungen (9) ist also dann

$$\cos \hat{\mathbf{A}} = cn\, 2\mu_1, \qquad \cos \hat{\mathbf{B}} = cn\, 2\mu_3$$

und mithin

$$\hat{\mathbf{A}} = am\, 2\mu_1, \qquad \hat{\mathbf{B}} = am\, 2\mu_3.$$

Gleichzeitig erkennt man, daß unter der Voraussetzung des Sehnenvierecks der Punkt Π auf der Geraden PH liegt,

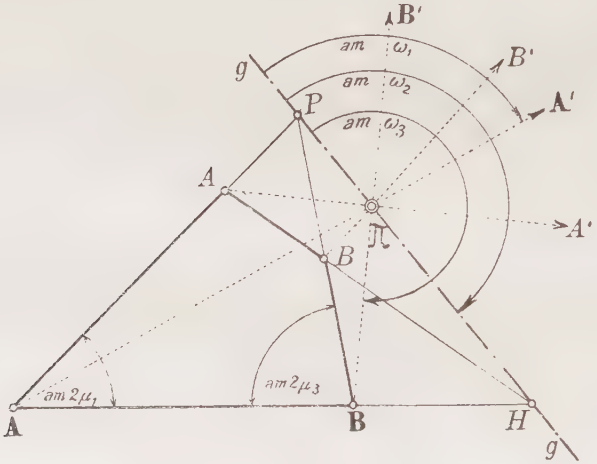

Fig. 3.

die dann mit g zusammenfällt; denn infolge der Gl. (21) ist jetzt

$$am\, \omega_2 = \pi,$$

also

$$\omega_2 = 2K, \qquad \omega_3 = 2\mu_1 + 2K, \qquad \omega_1 = -2\mu_3 + 2K$$

und infolgedessen (vergl. Fig. 3)

$$am\, \omega_1 = \pi - am\, 2\mu_3, \qquad am\, \omega_3 = \pi + am\, 2\mu_1,$$

letzteres auf Grund der allgemeinen Beziehung

$$am(2mK \pm u) = m\pi \pm am\, u.$$

Ist nun andererseits

$$\hat{P}+\hat{H}=\pi,$$

so folgt aus den Gleichungen (22) und mit Rücksicht auf die Beziehungen (9)

$$\cos\hat{H}=\frac{b^2+d^2-a^2-c^2}{2(ac+bd)}=cn\,2\mu_2,$$

also

$$\hat{H}=am\,2\mu_2.$$

Der Punkt H fällt jetzt auf die Diagonale $A\mathbf{B}$; die hierzu gehörige Lage geht aus der soeben angegebenen Kreisviereck-

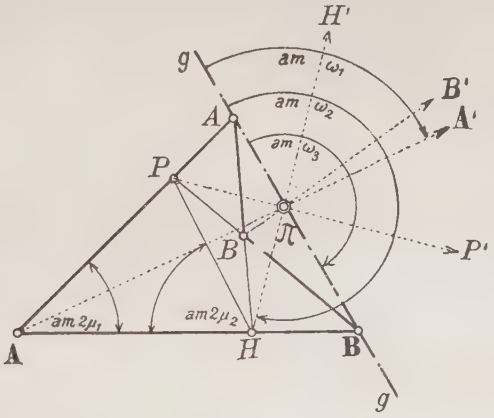

Fig. 4.

lage (Fig. 3) durch Spiegelung des Punktes B an der Diagonalen $A\mathbf{B}$ hervor. Da dann gleichzeitig

$$-\hat{\mathbf{A}}+\hat{B}=\pi$$

ist, so ergibt sich wieder

$$\hat{\mathbf{A}}=am\,2\mu_1,$$

und nach (21)

$$am\,\omega_3=-\pi,\quad \omega_3=-2K,\quad \omega_1=2\mu_2-2K,\quad \omega_2=-2\mu_1-2K,$$

mithin

$$am\,\omega_1=am\,2\mu_2-\pi,\quad am\,\omega_2=-am\,2\mu_1-\pi.$$

Die Lage ist im besonderen dadurch charakterisiert, daß jetzt die Punkte $\mathbf{A}$, P, B, H ein Sehnenviereck bilden (vergl. Fig. 4).

Um nun die in diesem Abschnitt angegebenen Darstellungen mittels elliptischer Funktionen für unsere Untersuchungen verwenden zu können, ist es vor allem notwendig, das Periodenparallelogramm zu kennen. Dieses wird bekanntlich in der komplexen Ebene des elliptischen Argumentes bestimmt durch ein Paar Elementarperioden, und zwar nimmt dann die betr. elliptische Funktion einen jeden Wert, den sie überhaupt annehmen kann, schon so oft an, als ihr Grad anzeigt, d. h. als sie Null- und Unendlichkeitspunkte besitzt. Man überzeugt sich nun leicht, daß $2K$ und $4iK'$ Elementarperioden sind, so daß also das Periodenparallelogramm durch die Punkte

$$O,\ 2K,\ 4iK',\ 2K+4iK'$$

gebildet wird.

§ 3. Durchführung einiger notwendiger Differentiationen.

Für unsere analytischen Untersuchungen wird es notwendig sein, von verschiedenen Größen die Differentialquotienten aufzustellen. Das Zunächstliegende wäre, alle Differentialquotienten, die überhaupt vorkommen, nach dem elliptischen Parameter Θ zu nehmen. Es wird sich aber zeigen, daß für viele Untersuchungen zunächst die Benutzung eines anderen Parameters zweckmäßig ist, vor allem für die höheren Berührungen und die Herleitung der diesbezüglichen Bedingungsgleichungen; es ist dies der Drehwinkel, um den sich die Koppel bei ihrer Bewegung gegen den Steg dreht, also im wesentlichen unser Winkel $\hat{H}$. Allerdings wollen wir aus leicht einzusehenden Gründen nicht diesen Winkel $\hat{H}$ selbst als Parameter wählen, sondern den Winkel

$$\angle t = \pi - \hat{H}.$$

Zur Bestimmung der Differentialquotienten der Größen $S_{m,\,n}$ und $C_{m,\,n}$ nach Θ benutzen wir die Darstellung (15) pag. 28. Unter Berücksichtigung der Formeln

$$dn(u-v)+dn(u+v)=\frac{2\,dn\,v\,dn\,u}{1-x^2sn^2v\,sn^2u},$$

$$dn(u-v)-dn(u+v)=-\frac{2x^2sn\,v\,sn\,u\,cn\,v\,cn\,u}{1-x^2sn^2v\,sn^2u}$$

sowie der Konstantenbeziehungen (12) pag. 26 folgt dann durch Differentiation nach Θ z. B.

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{dS_{14}}{d\Theta} &= C_{14}S_{23}\varkappa\sqrt{\frac{bc}{ad}}, & \frac{dC_{14}}{d\Theta} &= -S_{14}S_{23}\varkappa\sqrt{\frac{bc}{ad}}, \\ \frac{dS_{23}}{d\Theta} &= C_{23}S_{14}\varkappa\sqrt{\frac{ad}{bc}}, & \frac{dC_{23}}{d\Theta} &= -S_{23}S_{14}\varkappa\sqrt{\frac{ad}{bc}}, \end{aligned}$$

und hieraus die übrigen durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 und der Buchstaben a, b, c.

Um hieraus die Differentialquotienten der Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ nach dem oben erwähnten Parameter $t = \pi - \hat{H}$ herleiten zu können, müssen wir $\frac{dt}{d\Theta}$ kennen. Nun ist aber

$$\cos t = C_{24}, \quad \sin t = -S_{24},$$

mithin wird

$$(2)\qquad \frac{dt}{d\Theta} = -S_{31}\varkappa\sqrt{\frac{ac}{bd}},$$

und infolgedessen

$$(3)\quad \begin{aligned} \frac{dS_{14}}{dt} &= -\frac{b}{a}\frac{S_{23}}{S_{31}}C_{14}, & \frac{dC_{14}}{dt} &= \frac{b}{a}\frac{S_{34}}{S_{31}}S_{14}, \\ \frac{dS_{23}}{dt} &= -\frac{d}{c}\frac{S_{14}}{S_{31}}C_{23}, & \frac{dC_{23}}{dt} &= \frac{d}{c}\frac{S_{14}}{S_{31}}S_{23}, \\ \frac{dS_{24}}{dt} &= -C_{24}, & \frac{dC_{24}}{dt} &= S_{24}, \\ \frac{dS_{31}}{dt} &= -\frac{bd}{ac}\frac{S_{24}}{S_{31}}C_{31}, & \frac{dC_{31}}{dt} &= \frac{bd}{ac}\frac{S_{24}}{S_{31}}S_{31}, \\ \frac{dS_{34}}{dt} &= -\frac{b}{c}\frac{S_{12}}{S_{31}}C_{34}, & \frac{dC_{34}}{dt} &= \frac{b}{c}\frac{S_{12}}{S_{31}}S_{34}, \\ \frac{dS_{12}}{dt} &= -\frac{d}{a}\frac{S_{34}}{S_{31}}C_{12}, & \frac{dC_{12}}{dt} &= \frac{d}{a}\frac{S_{34}}{S_{31}}S_{12}. \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(4)\quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{b}{c}\frac{S_{12}}{S_{31}}, & \sigma_2 &= \frac{c}{d}\frac{S_{23}}{S_{24}}, & \sigma_3 &= \frac{b}{a}\frac{S_{23}}{S_{31}}, & \sigma_4 &= \frac{a}{b}\frac{S_{14}}{S_{24}}, \\ \tau_1 &= \frac{d}{c}\frac{S_{14}}{S_{31}}, & \tau_2 &= \frac{a}{d}\frac{S_{12}}{S_{24}}, & \tau_3 &= \frac{d}{a}\frac{S_{34}}{S_{31}}, & \tau_4 &= \frac{c}{b}\frac{S_{34}}{S_{24}} \end{aligned}$$

und beachtet die aus den Gleichungen (2a) pag. 15 folgenden Beziehungen

$$
\begin{aligned}
&1-\sigma_1-\tau_1=0,\\
&1+\sigma_2-\tau_2=0,\\
&1-\sigma_3+\tau_3=0,\\
&1+\sigma_4+\tau_4=0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

so erhält man schließlich die folgende Darstellung der ersten Differentialquotienten der Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ nach t:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS_{14}}{dt}=-\sigma_3 C_{14}, && \frac{dC_{14}}{dt}=\sigma_3 S_{14},\\
&\frac{dS_{23}}{dt}=-\tau_1 C_{23}, && \frac{dC_{23}}{dt}=\tau_1 S_{23}.\\
&\frac{dS_{24}}{dt}=-C_{24}, && \frac{dC_{24}}{dt}=S_{24},\\
&\frac{dS_{31}}{dt}=\begin{cases}-(\sigma_3-\sigma_1)C_{31}\\ -(\tau_3+\tau_1)C_{31}\end{cases}, && \frac{dC_{31}}{dt}=\begin{cases}-(\sigma_3-\sigma_1)S_{31}\\ -(\tau_3+\tau_1)S_{31}\end{cases},\\
&\frac{dS_{34}}{dt}=-\sigma_1 C_{34}, && \frac{dC_{34}}{dt}=\sigma_1 S_{34},\\
&\frac{dS_{12}}{dt}=-\tau_3 C_{12}, && \frac{dC_{12}}{dt}=\tau_3 S_{12}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Um nun auf Grund dieser Darstellung die zweiten Differentialquotienten der Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ nach t angeben zu können, müssen wir die Differentialquotienten der Größen σ_i, τ_i berechnen, von denen ja nach den Gleichungen (5) je zwei dem absoluten Werte nach gleich sind. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (18) p. 20 und (4) p. 37 ergibt sich nach einigen Rechnungen

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\sigma_1}{dt}=\sigma_1\tau_1\cot\alpha, && \frac{d\tau_1}{dt}=-\sigma_1\tau_1\cot\alpha,\\
&\frac{d\sigma_2}{dt}=\sigma_1\sigma_2\cot\beta, && \frac{d\tau_2}{dt}=\tau_2\sigma_3\cot\beta,\\
&\frac{d\sigma_3}{dt}=-\sigma_3\tau_3\cot\gamma, && \frac{d\tau_3}{dt}=-\sigma_3\tau_3\cot\gamma,\\
&\frac{d\sigma_4}{dt}=\sigma_4\tau_3\cot\delta, && \frac{d\tau_4}{dt}=-\tau_1\tau_4\cot\delta,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

und da nach (5)

$$
\frac{d\sigma_1}{dt}=-\frac{d\tau_1}{dt}, \quad \frac{d\sigma_2}{dt}=\frac{d\tau_2}{dt}, \quad \frac{d\sigma_3}{dt}=\frac{d\tau_3}{dt}, \quad \frac{d\sigma_4}{dt}=-\frac{d\tau_4}{dt}
$$

ist, hat man zwischen den σ_i, τ_i die weiteren Beziehungen:

$$\sigma_1\sigma_2 = \tau_2\sigma_3, \qquad \sigma_4\tau_3 = \tau_1\tau_4,$$

und infolgedessen

$$(8)\quad \begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1}, & \tau_2 &= -\frac{\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1},\\ \sigma_4 &= -\frac{\tau_1}{\tau_3+\tau_1}, & \tau_4 &= -\frac{\tau_1}{\tau_3+\tau_1}. \end{aligned}$$

Vermöge der einfachen Relationen (7) lassen sich nun auch die zweiten Differentialquotienten der Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ leicht angeben. Wir schreiben dieselben nur für die vier ersten dieser Größen hin, da die übrigen für unsere späteren Rechnungen nicht in Betracht kommen. Durch nochmaliges Differenzieren folgt aus den Gleichungen (6) unter Berücksichtigung der Beziehungen (7) für die zweiten Differentialquotienten von S_{14}, C_{14}, S_{23}, C_{23} die Darstellung

$$(9)\quad \begin{aligned} \frac{d^2S_{14}}{dt^2} &= -\sigma_3^2 S_{14} + \sigma_3\tau_3 C_{14}\cot\gamma, & \frac{d^2C_{14}}{dt^2} &= -\sigma_3^2 C_{14} - \sigma_3\tau_3 S_{14}\cot\gamma,\\ \frac{d^2S_{23}}{dt^2} &= -\tau_1^2 S_{23} + \sigma_1\tau_1 C_{23}\cot\alpha, & \frac{d^2C_{23}}{dt^2} &= -\tau_1^2 C_{23} - \sigma_1\tau_1 S_{23}\cot\alpha. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der höheren Differentialquotienten brauchen wir $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\gamma}{dt}$. Der Vollständigkeit halber wollen wir die Differentialquotienten aller vier Winkel α, β, γ, δ nach t herleiten, zumal wir sie auch später noch zu anderen Rechnungen brauchen werden. Aus den Gleichungen (4) p. 16 folgt

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} &= -\tau_3, & \frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\delta}{dt} &= -\sigma_3,\\ \frac{d\beta}{dt} - \frac{d\gamma}{dt} &= -\tau_1, & \frac{d\beta}{dt} - \frac{d\delta}{dt} &= -1,\\ \frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} &= \sigma_3 - \sigma_1, & \frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\delta}{dt} &= -\sigma_1. \end{aligned}$$

Die Beziehung

$$\frac{d\beta}{dt} - \frac{d\delta}{dt} = -1$$

in Verbindung mit der aus der Formelgruppe (11) pag. 18 entnommenen Relation

$$\frac{\sin\beta}{\sin\delta} = \frac{b}{d}\,\frac{S_{12}S_{23}}{S_{14}S_{34}}$$

eignet sich zur Berechnung von $\frac{d\beta}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$, und zwar erhält man durch Differentiation der letzteren Gleichung nach t und nach einigen Rechnungen und Umformungen

$$\frac{d\beta}{dt} = \lambda\,[\cot\alpha + \cot\gamma + \cot\delta], \tag{11a}$$

wenn

$$\lambda = \frac{1}{\cot\beta - \cot\delta} = -\frac{\sin\beta\sin\delta}{S_{24}}$$

ist. Analog ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \lambda\,[\cot\beta + \cot\gamma + \cot\delta],\\
\frac{d\gamma}{dt} &= \lambda\,[\cot\alpha + \cot\beta + \cot\delta],\\
\frac{d\delta}{dt} &= \lambda\,[\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma],
\end{aligned} \tag{11b}$$

und infolgedessen lassen sich die Größen σ_i, τ_i auch schreiben:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{\cot\gamma - \cot\delta}{\cot\beta - \cot\delta}, & \tau_1 &= \frac{\cot\beta - \cot\gamma}{\cot\beta - \cot\delta},\\
\sigma_2 &= \frac{\cot\delta - \cot\alpha}{\cot\alpha - \cot\gamma}, & \tau_2 &= \frac{\cot\delta - \cot\alpha}{\cot\alpha - \cot\gamma},\\
\sigma_3 &= \frac{\cot\alpha - \cot\delta}{\cot\beta - \cot\delta}, & \tau_3 &= \frac{\cot\alpha - \cot\beta}{\cot\beta - \cot\delta},\\
\sigma_4 &= \frac{\cot\gamma - \cot\beta}{\cot\alpha - \cot\gamma}, & \tau_4 &= \frac{\cot\beta - \cot\alpha}{\cot\alpha - \cot\gamma},
\end{aligned} \tag{12}$$

was ja auch direkt aus den Gleichungen (4) pag. 37 hergeleitet werden kann.

Wir sind nunmehr imstande, die höheren Differentialquotienten der Größen $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$ zu bestimmen; da wir jedoch im wesentlichen nur die Differentialquotienten von S_{14} und C_{14} brauchen werden, können wir uns auf diese allein beschränken. Da infolgedessen auch von den Größen σ_i, τ_i nur σ_3 und τ_3 vorkommen werden, wollen wir diese einfach durch σ und τ bezeichnen. Bedeutet ein Akzent (′) eine Differentiation nach t, so ist

$$\frac{d^2 S_{14}}{dt^2} = -\sigma^2 S_{14} - \sigma' C_{14}, \qquad \frac{d^2 C_{14}}{dt^2} = -\sigma^2 C_{14} + \sigma' S_{14},$$

und folglich

$$\begin{aligned} \frac{d^3 S_{14}}{dt^3} &= -3\sigma\sigma' S_{14} - [\sigma'' - \sigma^3] C_{14}, \\ \frac{d^3 C_{14}}{dt^3} &= -3\sigma\sigma' C_{14} + [\sigma'' - \sigma^3] S_{14}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ganz allgemein werden die n^{ten} Differentialquotienten von S_{14} und C_{14} nach t die Form haben:

$$\begin{aligned} \frac{d^n S_{14}}{dt^n} &= \varphi_{n-2} S_{14} - \psi_{n-1} C_{14}, \\ \frac{d^n C_{14}}{dt^n} &= \varphi_{n-2} C_{14} + \psi_{n-1} S_{14}, \end{aligned} \tag{14}$$

wobei φ_n und ψ_n bestimmte Differentialgrößen n^{ter} Ordnung in bezug auf die Differentialquotienten von σ nach t bedeuten, die den folgenden Rekursionsformeln genügen:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi'_{n-1} - \sigma\psi_n, \\ \psi_n &= \psi'_{n-1} + \sigma\varphi_{n-2}, \end{aligned} \tag{15}$$

und zwar ist hierbei

$$\varphi_0 = -\sigma^2, \quad \psi_0 = \sigma \tag{16}$$

zu setzen, wie leicht aus den für $\frac{dS_{14}}{dt}$ und $\frac{dC_{14}}{dt}$ gefundenen Werten zu ersehen ist. Auf Grund der Gleichungen (15) und (16) würde man z. B. erhalten:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sigma', & \varphi_1 &= -3\sigma\sigma', \\ \psi_2 &= \sigma'' - \sigma^3, & \varphi_2 &= -4\sigma\sigma'' - 3\sigma'^2 + \sigma^4, \\ \psi_3 &= \sigma''' - 6\sigma^2\sigma', & \varphi_3 &= -5\sigma\sigma''' - 10\sigma'\sigma'' + 10\sigma^3\sigma', \end{aligned} \tag{17}$$

und infolgedessen

$$\begin{aligned} \frac{d^4 S_{14}}{dt^4} &= -[4\sigma\sigma'' + 3\sigma'^2 - \sigma^4] S_{14} - [\sigma''' - 6\sigma^2\sigma'] C_{14}, \\ \frac{d^4 C_{14}}{dt^4} &= -[4\sigma\sigma'' + 3\sigma'^2 - \sigma^4] C_{14} + [\sigma''' - 6\sigma^2\sigma'] S_{14}. \end{aligned} \tag{18}$$

Zur wirklichen Auswertung der n^{ten} Differentialquotienten von S_{14} und C_{14} ist es also noch notwendig, daß wir die Differential-

quotienten von σ bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ kennen. Wir werden uns auf die Angabe von σ'' beschränken und die Berechnung von σ''' nur soweit andeuten, als es für unsere späteren Rechnungen notwendig ist. Vor allem zeigt sich jetzt, daß die Einführung der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zweckmäßig war, da sich ohne ihre Benutzung die höheren Differentialquotienten von σ nur schwer berechnen lassen.

Aus
$$\frac{d\sigma}{dt} = -\sigma\tau\cot\gamma$$
folgt durch nochmaliges Differenzieren
$$\begin{aligned}\frac{d^2\sigma}{dt^2} &= -\sigma\frac{d\tau}{dt}\cot\gamma - \tau\frac{d\sigma}{dt}\cot\gamma + \frac{\sigma\tau}{\sin^2\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\\ &= -\frac{d\sigma}{dt}\left[(\sigma+\tau)\cot\gamma + \frac{1}{\sin\gamma\cos\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\right]\end{aligned}$$
oder nach einigen Umformungen
$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\frac{d\sigma}{dt}\frac{[1+3\cot^2\gamma]\cot\alpha + \cot\beta + \cot\delta}{\cot\gamma\,[\cot\beta - \cot\delta]}$$
und schließlich
$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \sigma\tau[1+\sigma+3\sigma\Psi\cot\gamma], \tag{19}$$
wenn man zur Abkürzung
$$\Psi = \frac{\cot\alpha\cot^2\gamma + \cot\delta}{\cot\gamma\,[\cot\alpha - \cot\delta]} \tag{20}$$
setzt. Zur Berechnung von $\frac{d^3\sigma}{dt^3}$ müßte man also vor allem $\frac{d\Psi}{dt}$ kennen. Da wir diesen Differentialquotienten später brauchen, wollen wir seinen Wert noch mit angeben, und zwar berechnen wir ihn nach dem Differentiationsschema:
$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial\delta}\frac{d\delta}{dt}.$$
Aus (20) folgt aber mit Rücksicht auf die Beziehungen (11a) und (11b)
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = \frac{[1+\cot^2\alpha]\,[1+\cot^2\gamma]\cot\gamma\cot\delta}{\cot^2\gamma\,[\cot\alpha - \cot\delta]^2},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = -\frac{[\cot\alpha - \cot\delta]\,[1+\cot^2\gamma]\,[\cot\alpha\cot^2\gamma - \cot\delta]}{\cot^2\gamma\,[\cot\alpha - \cot\delta]^2},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \delta} = -\frac{[1+\cot^2\gamma]\,[1+\cot^2\delta]\cot\alpha\cot\gamma}{\cot^2\gamma\,[\cot\alpha - \cot\delta]^2}.$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich dann

$$\text{(21a)} \qquad \frac{d\Psi}{dt} = \frac{1+\cot^2\gamma}{\cot^2\gamma\,[\cot\alpha - \cot\delta]\,[\cot\beta - \cot\delta]}\Big[U+V\Big],$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\text{(21b)} \qquad \begin{aligned} U &= (\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma+2\cot\delta+\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma)\,(\cot\gamma-\cot\delta),\\ V &= \cot^2\delta+\cot^2\alpha\cot^2\gamma. \end{aligned}$$

Um den späteren Gang unserer Rechnungen nicht unnötig unterbrechen zu müssen, wollen wir schließlich noch an dieser Stelle einige Differentialgrößen berechnen, mit deren Hilfe M. Krause[1] ganz allgemein die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für eine n-punktige Berührung angibt. Es sei

$$\text{(22)} \qquad a_0 = -a\,C_{14}, \qquad b_0 = a\,S_{14}.$$

Dann wollen wir mit Krause die folgenden Abkürzungen einführen:

$$\text{(23a)} \qquad \begin{aligned} a_1 &= a_0 - \frac{db_0}{dt}, & b_1 &= b_0 + \frac{da_0}{dt},\\ a_2 &= \frac{d^2a_0}{dt^2} + \frac{db_0}{dt}, & b_2 &= \frac{d^2b_0}{dt^2} - \frac{da_0}{dt} \end{aligned}$$

und von $n>2$ an

$$\text{(23b)} \qquad a_n = \frac{d^n a_0}{dt^n} + \frac{d^{n-2}a_0}{dt^{n-2}}, \qquad b_n = \frac{d^n b_0}{dt^n} + \frac{d^{n-2}b_0}{dt^{n-2}},$$

[1] M. Krause, Zur Theorie der ebenen unveränderlichen Systeme, Archiv der Math. u. Phys., III. Reihe, XVI, 1, pag. 1.

sodaß also

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{dt} &= b_1 - b_0, & \frac{db_0}{dt} &= -a_1 + a_0, \\ \frac{da_1}{dt} &= -b_2, & \frac{db_1}{dt} &= a_2, \\ \frac{da_2}{dt} &= a_3 + b_2, & \frac{db_2}{dt} &= b_3 - a_2 \end{aligned} \tag{24a}$$

ist, dagegen wieder von $n > 2$ an

$$\frac{da_n}{dt} = a_{n+1}, \qquad \frac{db_n}{dt} = b_{n+1}. \tag{24b}$$

Da nun die Größen a_0 und b_0, von dem Faktor a (resp. $-a$) abgesehen, gleich den Größen C_{14} und S_{14} sind, deren Differentialquotienten ausführlich untersucht worden sind, ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{dt} &= -a\sigma S_{14}, & \frac{db_0}{dt} &= -a\sigma C_{14}, \\ \frac{d^2a_0}{dt^2} &= -a[-\sigma^2 C_{14} + \sigma' S_{14}], & \frac{d^2b_0}{dt^2} &= a[-\sigma^2 S_{14} - \sigma' C_{14}], \\ \frac{d^3a_0}{dt^3} &= -a[-3\sigma\sigma' C_{14} + (\sigma'' - \sigma^3) S_{14}], \\ \frac{d^3b_0}{dt^3} &= a[-3\sigma\sigma' S_{14} - (\sigma'' - \sigma^3) C_{14}], \end{aligned} \tag{25a}$$

und allgemein auf Grund der Rekursionsformeln (14) bis (16) pag. 41:

$$\begin{aligned} \frac{d^n a_0}{dt^n} &= -a[\varphi_{n-2} C_{14} + \psi_{n-1} S_{14}], \\ \frac{d^n b_0}{dt^n} &= a[\varphi_{n-2} S_{14} - \psi_{n-1} C_{14}]. \end{aligned} \tag{25b}$$

Infolgedessen wird

$$\begin{aligned} a_1 &= -aC_{14} + a\sigma C_{14} = -a(1-\sigma) C_{14} = a\tau C_{14} = -a_0\tau, \\ b_1 &= -aS_{14} - a\sigma S_{14} = a(1-\sigma) S_{14} = -a\tau S_{14} = -b_0\tau, \end{aligned} \tag{26a}$$

ferner

$$\begin{aligned} a_2 &= a[\sigma(\sigma-1) C_{14} - \sigma' S_{14}] = a\sigma\tau[C_{14} + S_{14}\cot\gamma], \\ b_2 &= -a[\sigma(\sigma-1) S_{14} + \sigma' C_{14}] = -a\sigma\tau[S_{14} - C_{14}\cot\gamma], \end{aligned} \tag{26b}$$

und allgemein

$$\begin{aligned} a_n &= -a[(\varphi_{n-2} + \varphi_{n-4}) C_{14} + (\psi_{n-1} + \psi_{n-3}) S_{14}], \\ b_n &= a[(\varphi_{n-2} + \varphi_{n-4}) S_{14} - (\psi_{n-1} + \psi_{n-3}) C_{14}]. \end{aligned} \tag{26c}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\Phi_n = \varphi_n + \varphi_{n-2}, \qquad \Psi_n = \psi_n + \psi_{n-2},$$

so gehen die Gleichungen (26 c) über in

$$\begin{aligned} a_n &= -a[\Phi_{n-2} C_{14} + \Psi_{n-1} S_{14}], \\ b_n &= a[\Phi_{n-2} S_{14} - \Psi_{n-1} C_{14}], \end{aligned} \tag{27}$$

und zwar sind Φ_n und Ψ_n wieder gewisse Differentialgrößen n^{ter} Ordnung in bezug auf die Differentialquotienten von σ nach t, für die formal dieselben Rekursionsformeln wie für die früher benutzten Differentialgrößen φ_n und ψ_n gelten [siehe Gl. (15) pag. 41], also

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \Phi'_{n-1} - \sigma \Psi_n, \\ \Psi_n &= \Psi'_{n-1} + \sigma \Phi_{n-2}, \end{aligned} \tag{28}$$

nur daß jetzt

$$\Psi_0 = \sigma, \qquad \Phi_0 = 1 - \sigma^2 \tag{29}$$

zu setzen ist. Hiernach wird z. B.

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sigma', & \Phi_1 &= -3\sigma\sigma', \\ \Psi_2 &= \sigma'' - \sigma^3 + \sigma, & \Phi_2 &= -4\sigma\sigma'' - 3\sigma'^2 + \sigma^4 - \sigma^2, \\ \Psi_3 &= \sigma''' - 6\sigma^2\sigma' + \sigma', & \Phi_3 &= -5\sigma\sigma''' - 10\sigma'\sigma'' + 10\sigma^3\sigma' - 3\sigma\sigma', \end{aligned} \tag{30}$$

und infolgedessen

$$\begin{aligned} a_3 &= -a[-3\sigma\sigma' C_{14} + (\sigma'' - \sigma^3 + \sigma) S_{14}], \\ b_3 &= a[-3\sigma\sigma' S_{14} - (\sigma'' - \sigma^3 + \sigma) C_{14}] \text{ usw.} \end{aligned} \tag{31}$$

Um schließlich a_3 und b_3 in einer für unsere späteren Untersuchungen vorteilhaften Form zu erhalten, wollen wir $\Psi_2 = \sigma'' - \sigma^3 + \sigma$ wirklich berechnen, und zwar ergibt sich auf Grund der Gleichungen (19) und (20) pag. 42 nach einigen leichten Umformungen

$$\Psi_2 = 3\sigma^2\tau\Psi\cot\gamma, \quad \left[\Psi = \frac{\cot\alpha\cot^2\gamma + \cot\delta}{\cot\gamma[\cot\alpha - \cot\delta]}\right]. \tag{32}$$

Berücksichtigt man ferner, daß $\sigma' = -\sigma\tau\cot\gamma$ ist, so nehmen die Gleichungen (31) die Gestalt an:

$$(33)\qquad \begin{aligned} a_3 &= -3a\sigma^2\tau\cot\gamma\,[C_{14}+\Psi S_{14}],\\ b_3 &= 3a\sigma^2\tau\cot\gamma\,[S_{14}-\Psi C_{14}]. \end{aligned}$$

Hiermit haben wir diese für unsere späteren Untersuchungen notwendigen Hilfsrechnungen weit genug geführt. Im folgenden Kapitel wollen wir nunmehr die Grundgleichungen der durch das Gelenkviereck erzeugten Bewegung, d. h. die Gleichungen der Koppelkurve und Polkurven, aufstellen und, soweit es erforderlich ist, aus ihrer Darstellung mittels elliptischer Funktionen einige bekannte Resultate, vor allem in bezug auf den Grad, die imagmären Kreispunkte und die Asymptoten, herleiten.

Kapitel II.

Die Polkurven und die Koppelkurve.

§ 4. Die Grundgleichungen der durch das ebene Gelenkviereck erzeugten Bewegung.

Zum Zwecke der analytischen Behandlung der Polkurven und der Koppelkurve wählen wir den Punkt **A** als Koordinaten-

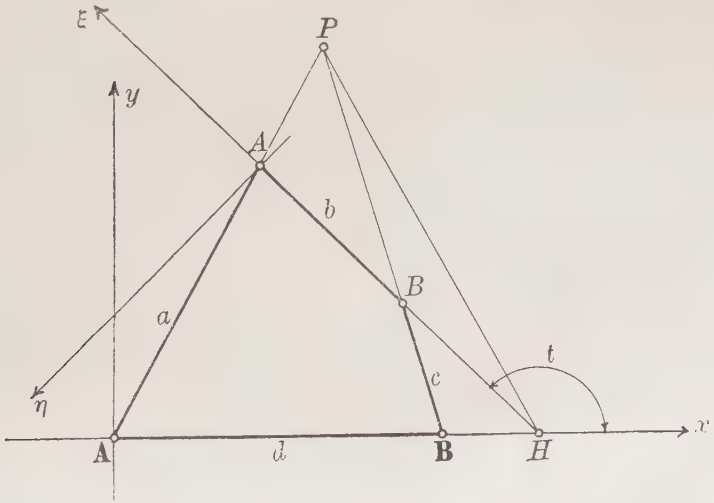

Fig. 5.

anfangspunkt eines rechtwinkligen in der Ebene des Steges festen Koordinatensystems (x, y), dessen x-Achse mit dem Steg **AB** zusammenfällt, und zwar so, daß die positive x-Richtung gleich der Richtung von **A** nach **B** ist. In der beweglichen Ebene der Koppel nehmen wir ein zweites rechtwinkliges mit dieser Ebene fest verbundenes Koordinatensystem (ξ, η) an, und zwar

so, daß der Koordinatenanfangspunkt der Punkt A ist und die positive ξ-Richtung mit der Richtung von B nach A zusammenfällt. Ferner sei die positive η-Richtung so gewählt, senkrecht zu AB, daß bei einer genügenden Drehung des beweglichen Systems die positive η-Richtung mit der positiven y-Richtung identisch wird, sobald die beiden Abszissenachsen gleich gerichtet sind.

Den Winkel, um welchen die positive ξ-Achse gegen die positive x-Achse gedreht erscheint, wollen wir mit t bezeichnen. Dann sind die Koordinaten der Punkte A und B

$$\begin{aligned} x_a &= a \cos \hat{\mathbf{A}} = -a C_{14} = a_o, \\ y_a &= a \sin \hat{\mathbf{A}} = \quad a S_{14} = b_o, \end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} x_b &= d - c \cos \hat{\mathbf{B}} = d + c C_{34}, \\ y_b &= \quad c \sin \hat{\mathbf{B}} = -c S_{34}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Gleichungen der Bahnkurve oder Koppelkurve, die ein beliebiger Punkt M (ξ, η) der beweglichen Ebene in der festen Ebene beschreibt, findet man, indem man die Transformationsgleichungen aufstellt, die zwischen den beiden Koordinatensystemen bestehen. Sind x, y die Koordinaten des Punktes M im festen Koordinatensystem, so lauten diese Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_a + \xi \cos t - \eta \sin t, \\ y &= y_a + \xi \sin t + \eta \cos t, \end{aligned}$$

oder also nach (1)

$$\begin{aligned} x &= a_o + \xi \cos t - \eta \sin t, \\ y &= b_o + \xi \sin t + \eta \cos t. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Gleichungen (3) stellen für feste Werte von ξ, η die Bahnkurve oder Koppelkurve des Punktes M (ξ, η) in Parameterform dar.

Die Gleichungen der festen Polkurve, der sogenannten Polbahn (p)[1] lassen sich leicht bestimmen, da ja (p) der geometrische Ort derjenigen Punkte P der festen Ebene ist, die nacheinander

[1] Die Bezeichnungsweise schwankt in der Literatur.

zu momentanen Drehzentren oder Polen der Bewegung werden. Aus den Gleichungen der beiden Radien $\mathbf{A}A$ und $\mathbf{B}B$:

$$y = -x\frac{S_{14}}{C_{14}}, \qquad y = -(x-d)\frac{S_{34}}{C_{34}}$$

erhält man als Koordinaten des Poles P:

$$\begin{aligned} x &= \quad d\frac{S_{34}}{S_{31}}C_{14}, \\ y &= -d\frac{S_{34}}{S_{31}}S_{14}. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Gleichungen (4) stellen zugleich im Koordinatensystem (xy) die Polbahn (p) in Parameterform dar.

Die bewegliche Polkurve, die wir kurz als Polkurve (π) bezeichnen wollen, ist der geometrische Ort aller derjenigen Punkte der beweglichen Ebene, die im Verlaufe der Bewegung mit den momentanen Drehzentren zusammenfallen. Ihre Gleichungen erhält man daher, wenn man die Koordinaten des Poles [Gl. (4)] in die als Transformationsgleichungen zu benutzenden Gleichungen (3) der Koppelkurve einsetzt und dann ξ und η berechnet. Auf diese Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi &= \quad b\frac{S_{23}}{S_{31}}C_{12}, \\ \eta &= -b\frac{S_{23}}{S_{31}}S_{12}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Gleichungen (5) stellen im Koordinatensystem (ξ, η) die Polkurve (π) in Parameterform dar.

Als Parameter kommt für alle drei Kurven entweder der Drehwinkel t oder der elliptische Parameter Θ in Betracht.

Mit Hilfe der früher eingeführten Abkürzungen

$$\sigma \equiv \sigma_3 = \frac{b}{a}\frac{S_{23}}{S_{31}}, \qquad \tau \equiv \tau_3 = \frac{d}{a}\frac{S_{34}}{S_{31}}$$

kann man schließlich die Gleichungen der Polbahn (p) und der Polkurve (π) in eine äußerst einfache Gestalt bringen, die vor

allem ein außerordentlich bequemes Differenzieren gestattet, und zwar erhält man hiernach als Gleichungen der Polbahn (p):

$$x = a\tau C_{14}, \qquad y = -a\tau S_{14}$$

oder nach (26a) pag. 44

$$x = a_1, \qquad y = b_1, \tag{6}$$

während sich als Gleichungen der Polkurve (π) ergeben:

$$\xi = a\sigma C_{12}, \qquad \eta = -a\sigma S_{12}. \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (1) und (6) erkennt man zugleich, daß den Abkürzungen a_0, b_0, a_1, b_1 einfache geometrische Bedeutungen zugrunde liegen, und zwar sind a_0, b_0 die Koordinaten des Punktes A, a_1, b_1 die Koordinaten des Poles P im festen Koordinatensystem (x, y).

Endlich wollen wir noch die Gleichungen der Polkurven und der Koppelkurve mittels elliptischer Funktionen angeben. Wir wählen zu diesem Zwecke die Darstellung (20) pag. 30; dann sind die Gleichungen der Polbahn (p):

$$\begin{aligned} x &= d\,\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{[dnu_1 + dnu_2]\,[1 + dnu_2\,dnu_3]}{sn^2u_2\,[dnu_1 - dnu_3]}, \\ y &= d\,\frac{i}{\varkappa^2}\,\frac{[dnu_1 + dnu_2]\,[dnu_2 + dnu_3]}{sn^2u_2\,[dnu_1 - dnu_3]}, \end{aligned} \tag{8}$$

der Polkurve (π):

$$\begin{aligned} \xi &= b\,\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{[dnu_3 - dnu_2]\,[1 - dnu_1\,dnu_2]}{sn^2u_2\,[dnu_1 - dnu_3]}, \\ \eta &= b\,\frac{i}{\varkappa^2}\,\frac{[dnu_3 - dnu_2]\,[dnu_2 - dnu_1]}{sn^2u_2\,[dnu_1 - dnu_3]} \end{aligned} \tag{9}$$

und der Koppelkurve:

$$\begin{aligned} x &= -a\,\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{1 + dnu_2\,dnu_3}{snu_2\,snu_3} + \xi\,\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{1 + dnu_1\,dnu_3}{snu_1\,snu_3} - \eta\,\frac{i}{\varkappa^2}\,\frac{dnu_1 + dnu_3}{snu_1\,snu_3}, \\ y &= -a\,\frac{i}{\varkappa^2}\,\frac{dnu_3 + dnu_2}{snu_2\,snu_3} + \xi\,\frac{i}{\varkappa^2}\,\frac{dnu_1 + dnu_3}{snu_1\,snu_3} + \eta\,\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{1 + dnu_1\,dnu_3}{snu_1\,snu_3}. \end{aligned} \tag{10}$$

Bei unseren späteren Untersuchungen wird es sich nun zeigen, daß die Anwendung einiger weiterer Koordinatensysteme in der Koppelebene von Vorteil ist. Aus diesem Grunde wollen

wir hier die betreffenden Koordinatentransformationen mit angeben. Wir wollen nämlich außer dem bis jetzt verwendeten Koordinatensystem (ξ, η) in der beweglichen Ebene ein zweites Koordinatensystem (ξ_1, η_1) benutzen, dessen Koordinatenanfangspunkt wieder der Punkt A ist, dessen Achsen aber immer den in der ruhenden Ebene liegenden Achsen (x, y) parallel sind. Dann ist dieses Koordinatensystem in der beweglichen Ebene zwar nicht mehr fest, sondern ändert sich mit der Lage des Gelenkvierecks, bietet aber in vielen Fällen, vor allem, wenn es sich um Momentanlagen handelt, große Vorteile. Die Veränderlichkeit dieses Koordinatensystems wird dadurch angedeutet, daß die betreffenden Koordinaten ξ_1, η_1 Funktionen des Drehwinkels t sind, und zwar ist

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi \cos t - \eta \sin t, \\ \eta_1 &= \xi \sin t + \eta \cos t, \end{aligned} \tag{11}$$

woraus die später mit Vorteil zu verwendenden Differentialbeziehungen

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\eta_1, \qquad \frac{d\eta_1}{dt} = \xi_1 \tag{12}$$

folgen.

Hierbei ist nun zu bemerken, daß Gleichungen in den Koordinaten ξ_1, η_1 nur dann als Gleichungen von Kurven in der Koppelebene aufgefaßt werden können, wenn letztere momentan in Ruhe ist, also für einen konstanten Wert des Drehwinkels t, dagegen nicht, wenn man die ganze Bewegung ins Auge faßt, also bei veränderlichem t.

Die Gleichungen der Koppelkurve nehmen jetzt z. B. die einfache Form an:

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \xi_1, \\ y &= b_0 + \eta_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Ein zweites in der Koppelebene veränderliches Koordinatensystem (ξ_2, η_2) kann man einführen, indem man das zuletzt betrachtete parallel zu sich um die Strecke AP verschiebt, so daß also der Pol P zum Koordinatenanfangspunkt wird. Diese Koordinatenverschiebung geschieht mittels der Gleichungen

$$\xi_2 = \xi_1 - \overline{AP}\cos\hat{\mathbf{A}},$$
$$\eta_2 = \eta_1 - \overline{AP}\sin\hat{\mathbf{A}}$$

oder

$$\xi_2 = \xi_1 + a_0\sigma = \xi_1 + \frac{db_0}{dt}, \tag{14}$$
$$\eta_2 = \eta_1 + b_0\sigma = \eta_1 - \frac{da_0}{dt}.$$

Als Gleichungen der Koppelkurve erhält man dann:

$$x = a_1 + \xi_2, \tag{15}$$
$$y = b_1 + \eta_2,$$

was ja auch direkt aus der Figur folgt, da a_1, b_1 die Koordinaten des Poles im xy-System sind.

Endlich möge noch ein drittes veränderliches Koordinatensystem (ξ_3, η_3) eingeführt werden, und zwar so, daß die Achsen mit Polbahntangente und Polbahnnormale zusammenfallen. Man erhält also dieses System aus dem vorhergehenden durch eine Drehung um den Winkel φ_t[1], den die Polbahntangente mit dem Steg bildet und der bestimmt ist durch

$$\tan\varphi_t = -\frac{a_2}{b_2}, \qquad \sin\varphi_t = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \qquad \cos\varphi_t = -\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Die entsprechenden Transformationsgleichungen sind daher:

$$\xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}[b_2\xi_3 + a_2\eta_3], \tag{16}$$
$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}[a_2\xi_3 - b_2\eta_3].$$

Wie schon oben bemerkt wurde, werden die drei zuletzt eingeführten Koordinatensysteme besonders dann mit Vorteil Verwendung finden, wenn Augenblickslagen des Gelenkvierecks zu betrachten sind und Kurven in der beweglichen Ebene diskutiert werden sollen, die bei jeder einzelnen Koppellage zustande kommen (z. B. Wendekreis); dagegen muß man stets auf das erste Koordinatensystem zurückgehen, wenn es sich

[1] Siehe pag. 56.

um Kurven handelt, die erst durch die vollständige Bewegung des Gelenkvierecks erzeugt werden (z. B. Undulationskurve).

Auf Grund dieser verschiedenen Gleichungsformen sind wir nunmehr imstande, die Polkurven und die Koppelkurve analytisch zu untersuchen. Wir werden je nach dem Zweck der Untersuchung die eine oder die andere Gleichungsform benutzen; handelt es sich um Differentiationen, so werden wir mit Vorteil die Formen (3), (6), (7) und (13) verwenden können, dagegen werden sich die Darstellungen (8), (9), (10) mittels elliptischer Funktionen besonders zur Bestimmung des Grades usw. eignen.

§ 5. Die Polkurven.

Die Polkurven der durch das ebene Gelenkviereck erzeugten Bewegung sind vielfach in bezug auf ihre Eigenschaften untersucht worden, für spezielle Fälle besonders von Roberts[1], während der allgemeine Fall von R. Müller[2] in eingehender Weise behandelt worden ist. Wir können uns daher im folgenden darauf beschränken, kurz diejenigen Eigenschaften aus unseren Parameterdarstellungen herzuleiten, von denen wir bei unseren späteren Rechnungen Gebrauch machen müssen.

Aus den Gleichungen (8) der Polbahn (p) folgt zunächst ohne weiteres, daß die Polbahn symmetrisch in bezug auf die x-Achse, also den Steg, ist, und zwar unterscheiden sich die Parameter entsprechender symmetrischer Punkte um $2iK'$. Dasselbe gilt für die Polkurve (π); sie ist symmetrisch in bezug auf die Koppel, wie die Gleichungen (9) lehren. Ferner zeigen die Gleichungen (4), (5) und (8), (9) in einfacher Weise, daß die Polbahn (p) in die Polkurve (π) übergeht, wenn man d mit b vertauscht, entsprechend der bekannten Tatsache, daß bei

[1] Roberts, On the motion of a plane under certain conditions. Proceedings of the London Mathematical Society, vol. III, p. 312; On the pedals of conic sections, daselbst, p. 94.

[2] R. Müller, Über einige Kurven, die mit der Theorie des ebenen Gelenkvierecks in Zusammenhang stehen, Z. f. M. u. Ph., Bd. 48, 1902, p. 224ff.; vergl. auch F. Ebner, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven, Leipz., 1906.

der Umkehrung der Bewegung, bei der die Koppel zum Steg gemacht wird, die beiden Polkurven ihre Rollen vertauschen.

Um den Grad einer mittels doppeltperiodischer Funktionen in Parameterform dargestellten Kurve zu bestimmen, hat man nach bekannten Regeln ihre Unendlichkeitspunkte zu ermitteln; die Anzahl der Unendlichkeitspunkte ist dann direkt gleich dem Grade der Kurve.

Aus den Gleichungen (8) und (9) erkennt man nun, daß die beiden Polkurven ein und dieselben Unendlichkeitspunkte besitzen, und zwar ergeben sich die entsprechenden Parameter aus

$$(1) \qquad (\mathrm{I})\ sn^2 u_2 = 0, \qquad (\mathrm{II})\ dn\, u_1 - dn\, u_3 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert die doppelt zu zählenden Unendlichkeitspunkte $u_2 = 0$ und $u_2 = 2iK'$, also nach (20b) pag. 30:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Theta &= \mu_1 + iK', & \Theta &= \mu_1 + 3iK', \\ \Theta &= \mu_1 + iK', & \Theta &= \mu_1 + 3iK', \end{aligned}$$

während aus der zweiten folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_3, & u_1 &= -u_3 + 2K, \\ u_1 &= -u_3 + 4iK', & u_1 &= -u_3 + 2K + 4iK', \end{aligned}$$

also

$$(3) \qquad \begin{aligned} \Theta &= \mu_3 + iK', & \Theta &= \mu_3 + K + iK', \\ \Theta &= \mu_3 + 3iK' & \Theta &= \mu_3 + K + 3iK'. \end{aligned}$$

Um den Charakter dieser 8 Unendlichkeitspunkte zu erkennen, hat man die Tangenten in ihnen zu untersuchen. Wir führen die entsprechenden Rechnungen nicht durch, da die Resultate bekannt sind[1]. Bedeutet A die Richtungskonstante, n den Abschnitt der Tangente auf der x- (resp. ξ-) Achse, so erhält man z. B. bei der Polbahn (p) für die doppelt zu zählenden Unendlichkeitsparameter $\mu_1 + iK'$ und $\mu_1 + 3iK'$:

$$(4) \qquad A = \pm i, \qquad n = \frac{a^2 d}{a^2 - c^2};$$

ferner für $\mu_3 + iK'$ und $\mu_3 + 3iK'$:

$$(5) \qquad A = \pm i \ \frac{\sqrt{q_1 q_3 p_{12}(-p_{14})}}{b^2 - d^2 - (a-c)^2}, \qquad n = -\frac{cd}{a-c}$$

[1] R. Müller, a. a. O.

und für $\mu_3 + K + iK'$ und $\mu_3 + K + 3iK'$:

$$(6) \qquad A = \pm i \frac{\sqrt{q_2 q_4 p_0 p_{13}}}{(a+c)^2 - b^2 + d^2}. \qquad n = \frac{cd}{a+c}.$$

Die entsprechenden Werte für die Polkurve (π) ergeben sich hieraus durch Vertauschung von d mit b.

Die Polkurven besitzen also 8 Unendlichkeitspunkte, gehen durch die imaginären Kreispunkte und haben diese im allgemeinen zu Spitzen. Sie sind daher bizirkulare Kurven 8. Ordnung. Die Tangenten in den imaginären Kreispunkten schneiden sich auf dem Steg (bezw. der Koppel) in einem reellen Fokalzentrum, das den Steg (bezw. die Koppel) außen im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Arme teilt[1]. [Siehe Gl. (4)].

Aus (5) und (6) folgt ferner, daß die Polkurven außerdem je zwei Paar symmetrisch liegende Asymptoten besitzen, die reell oder imaginär sein können, sich aber stets paarweise in zwei reellen Punkten auf dem Steg (bezw. der Koppel) schneiden, die den Steg (bezw. die Koppel) innen und außen im umgekehrten Verhältnis der anliegenden Arme teilen[1].

Da nun bei beliebiger Wahl der Gliedlängen a, b, c, d die Größen q_1, q_2, q_3, q_4 und p_0 unter allen Umständen positiv sind, dagegen die Größen p_{12}, p_{13}, p_{14} positiv oder negativ sein können, erkennt man aus (5) und (6), daß die zu $\mu_3 + iK'$ und $\mu_3 + 3iK'$ gehörenden Asymptoten nur dann reell sind, wenn

$$p_{12}(-p_{14}) < 0,$$

d. h. wenn

$$(5^*) \qquad |a-c| > |b-d|^1$$

ist, während die Reellitätsbedingung für die zu $\mu_3 + K + iK'$ und $\mu_3 + K + 3iK'$ gehörenden Asymptoten lautet:

$$p_{13} < 0,$$

also

$$(6^*) \qquad a + c < b + d^1,$$

und zwar gelten diese Bedingungsgleichungen für beide Polkurven, da sie sich nicht ändern, wenn man in ihnen b und d miteinander vertauscht.

---

[1] R. Müller, a. a. O., p. 227 u. 228.

Schließlich wollen wir aus den Parametergleichungen der Polbahn (p) die bekannte Bobilliersche Konstruktion der Polbahntangente herleiten. Aus den Gleichungen (6) pag. 50 folgt nämlich unter Berücksichtigung der Differentialbeziehungen (24) pag. 44

$$\frac{dx}{dt} = -b_2, \qquad \frac{dy}{dt} = a_2,$$

und infolgedessen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_2}{b_2} = \frac{C_{14} + S_{14}\cot\gamma}{S_{14} - C_{14}\cot\gamma}. \tag{7}$$

Beachtet man nun, daß der Winkel φ_t, den die Polbahntangente mit der positiven x-Achse bildet, hiernach bestimmt ist durch

$$\tan\varphi_t = -\frac{a_2}{b_2} = \frac{-\cos\hat{\mathbf{A}} + \sin\hat{\mathbf{A}}\cot\gamma}{\sin\hat{\mathbf{A}} + \cos\hat{\mathbf{A}}\cot\gamma} = \tan(\hat{\mathbf{A}} - \gamma),$$

so erhält man

$$\varphi_t = \hat{\mathbf{A}} - \gamma. \tag{8}$$

Hierin ist aber die Bobilliersche Konstruktion von Polbahntangente und Polbahnnormale[1] enthalten, die ja ganz allgemein für die Bewegung zweier ebener Systeme gilt, wenn A und B die Krümmungsmittelpunkte zweier Kurven der bewegten Ebene und $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte der entsprechenden Hüllbahnkurven sind. In unserem Falle würde sie lauten:

Man verbinde den Pol P mit dem Punkte H, dem Schnittpunkt von Koppel und Steg, und trage den dadurch entstehenden Winkel $\mathbf{B}\hat{P}H = \gamma$ an $\mathbf{A}P$ in P in entgegengesetztem Sinne an. Dann ist der freie Schenkel dieses Winkels die Polbahntangente und die durch P dazu senkrecht gezogene Gerade die Polbahnnormale.

Bei Allievi[2] findet sich diese Konstruktion als reine Linearkonstruktion angegeben. Da wir sie ihrer bequemen

---

[1] Bobillier, Cours de géometrie, 1870, p. 232. — Vergl. auch: Aronhold, Kinematische Mitteilungen, Verh. d. V. z. Bef. d. Gewerbefleißes in Preußen, 1872, p. 144; Grübler, Z. f. M. u. Ph., 1884, p. 212; Burmester, Kinematik I, p. 58, Fig. 59 u. 60; R. Müller, a. a. O.

[2] Allievi, Cinematica della biella piana, Napoli, 1895, p. 30, Fig. 14.

Handhabung wegen später in dieser Allievischen Form benutzen werden, sei sie hier mit angeführt (vergl. Fig. 6):

Man fälle vom Punkte H (oder einem beliebigen anderen Punkte der Geraden PH) Lote auf die Arme $\mathbf{A}A$ und $\mathbf{B}B$

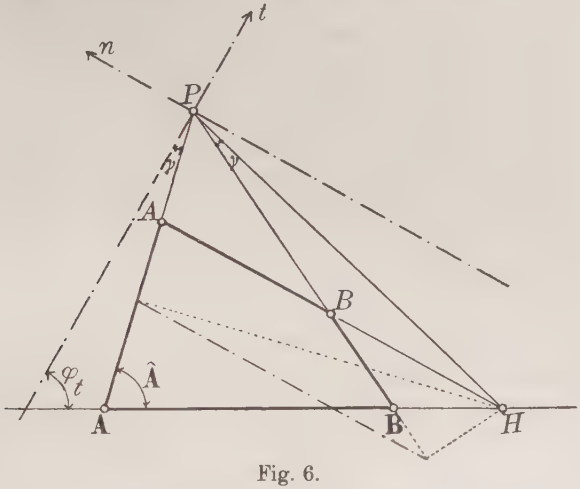

Fig. 6.

und ziehe zur Verbindungslinie der Fußpunkte dieser Lote durch den Pol P die Parallele und die Senkrechte; dann ist die Senkrechte die Polbahntangente und die Parallele die Polbahnnormale.

§ 6. Die Koppelkurve im allgemeinen.

Die Koppelkurve ist naturgemäß häufig Gegenstand von Untersuchungen geworden. Vor allem hat die Gestaltung der Koppelkurve in bezug auf ihre Doppelpunkte, Selbstberührungspunkte, Brennpunkte, Wendepunkte und in höherer Ordnung berührenden Tangenten das vielseitigste Interesse beansprucht. Ihre allgemeinen Eigenschaften wurden schon von Roberts[1] und Cayley[2] aufgestellt und Roberts[1] erkannte auch zuerst, daß jede Koppelkurve durch drei verschiedene Gelenkvierecke erzeugt werden kann.

[1] Roberts, Proceedings of the Lond. Math. Soc., 1871, 1874, 1876.
[2] Cayley, Proceedings of the Lond. Math. Soc., 1872, 1874, 1876, 1877.

Aus der neueren Zeit sind die zahlreichen Arbeiten von R. Müller[1] zu nennen, in denen er die Koppelkurve nach den verschiedensten Richtungen hin behandelt und dabei besonders das Problem der n-punktigen Geradführung untersucht, das ja in engem Zusammenhange mit der n-punktigen Berührung steht. Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für eine n-punktige Berührung in ebenen unveränderlichen Systemen hat M. Krause[2] ganz allgemein mit Hilfe gewisser Differentialgrößen (siehe pag. 43) angegeben. Wir werden im dritten Kapitel diese allgemeinen Bedingungen auf den speziellen Fall des Gelenkvierecks übertragen und im besonderen zeigen, daß sich dann für die fünfpunktige Berührung die von R. Müller angegebene Winkelbeziehung ergibt, von der wir dann ausgehend im Kapitel IV die sechspunktige Berührung mit Hilfe des in der Einleitung erwähnten Liouvilleschen Satzes behandeln wollen.

Zur Bestimmung des Grades der Koppelkurve benutzen wir wieder am zweckmäßigsten die Darstellung mittels elliptischer Funktionen, indem wir die Unendlichkeitspunkte ermitteln. Aus den Gleichungen (10) pag. 50 folgt, daß x und y unendlich groß werden, wenn

$$(1) \qquad (\mathrm{I})\ sn\,u_1 = 0, \quad (\mathrm{II})\ sn\,u_2 = 0, \quad (\mathrm{III})\ sn\,u_3 = 0$$

ist, also für die sechs Parameter

$$(2) \qquad \begin{array}{lll} -\nu + iK', & \mu + iK', & -\mu + iK', \\ -\nu + 3iK', & \mu + 3iK', & -\mu + 3iK'. \end{array}$$

Diese Unendlichkeitspunkte fallen sämtlich mit den imaginären Kreispunkten zusammen, wie die Untersuchung der Tangenten in ihnen zeigt, und zwar sind die Gleichungen dieser Tangenten:

$$(3) \qquad \begin{array}{l} y = \mp i(x-d), \\ y = \mp ix \pm \frac{d}{b}[i\xi \pm \eta], \\ y = +ix. \end{array}$$

---

[1] R. Müller, Z. f. M. u. Ph., 1889, 1891, 1897, 1898, 1901, 1902.

[2] M. Krause, Zur Theorie der ebenen unveränderlichen Systeme, Archiv der Math. u. Phys., III. Reihe, XVI, 1, p. 1.

Die Koppelkurve ist also eine trizirkulare Kurve 6. Ordnung.

Je zwei zusammengehörige durch die Gl. (3) dargestellte Tangenten schneiden sich in einem reellen Punkt; die Koordinaten dieser Punkte sind (d, o), $(\frac{d}{b}\xi, \frac{d}{b}\eta)$, $(0, 0)$. Die Koppelkurve besitzt also drei außergewöhnliche Brennpunkte, die Punkte **A** und **B** und einen dritten Punkt Γ, der so liegt, daß das Dreieck $\mathbf{AB}\Gamma$ dem Koppeldreieck ABM ähnlich ist. Diese drei Brennpunkte spielen bekanntlich für die dreifache Erzeugungsweise[1] der Koppelkurve eine wichtige Rolle.

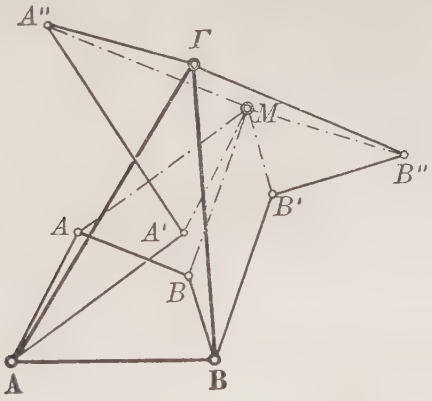

Fig. 7.

Da wir später von dieser dreifachen Erzeugung Gebrauch machen werden, wollen wir hier die diesbezügliche Konstruktion[2] angeben:

Man zeichne die Parallelogramme $\mathbf{A}AMA'$ und $\mathbf{B}BMB'$ und mache

$$\triangle A'MA'' \sim \triangle ABM \sim \triangle MB'B''.$$

Konstruiert man schließlich das Parallelogramm $MA''\Gamma B''$, so ist auch

$$\triangle \mathbf{AB}\Gamma \sim \triangle ABM,$$

[1] Roberts, Three-bar Motion in Plane Space, Proceedings of the Lond. Math. Soc., VII, p. 14.

[2] Vergl. Burmester, Kinematik I, p. 296; R. Müller, Z. f. M. u. Ph., 46, 1901, p. 331; F. Ebner, p. 82.

also das Brennpunktsdreieck der von M beschriebenen Koppelkurve, die nun nach dem Robertsschen Satze[1] außer durch das Gelenkviereck $\mathbf{AB}AB$ auch durch die Gelenkvierecke $\mathbf{A}\Gamma A'A''$ und $\mathbf{B}\Gamma B'B''$ erzeugt werden kann.

[1] Roberts, Three-bar Motion in Plane Space, Proceedings of the Lond. Math. Soc., VII, p. 14.

Kapitel III.

Die Koppelkurve mit drei- bis fünfpunktig berührender Tangente.

§ 7. Die dreipunktig berührende Tangente und der Wendekreis.

Soll eine Kurve in einem ihrer Punkte eine dreipunktig berührende Tangente besitzen, soll dieser Punkt also ein Wendepunkt sein, so ist nach bekannten Regeln die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in diesem Punkte $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwindet. Ist die Kurve in Parameterform gegeben, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{N}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}, \qquad N = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Infolgedessen ist allgemein

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \tag{1}$$

die Bedingung dafür, daß ein Punkt einer in Parameterform gegebenen Kurve ein Wendepunkt ist, allerdings unter der Voraussetzung, daß $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ nicht gleichzeitig der Null gleich werden.

Die Gleichung (1) kann nun zunächst dazu dienen, diejenigen Parameter (t oder Θ) zu bestimmen, für die eine bestimmte von einem Punkt $M(\xi, \eta)$ der Koppelebene beschriebene Bahnkurve Wendepunkte besitzt. Wir wollen diese Frage hier nicht weiter erörtern; vielmehr interessiert uns hier eine andere Frage, nämlich die: Wo liegen bei konstantem Parameter, d. h. in einer bestimmten Koppellage, alle die Punkte der Koppelebene, die sich augenblicklich in einem Wendepunkte ihrer Bahnkurve befinden? Die Gleichung (1) stellt dann eine

gewisse Kurve dar, die für jede Koppellage eindeutig bestimmt ist, und zwar ist sie für die komplane Bewegung zweier ebener unveränderlicher Systeme ein Kreis, der von de la Hire[1] entdeckt wurde und daher allgemein der de la Hiresche Wendekreis genannt wird. Er spielt bekanntlich auch für den Beschleunigungszustand des bewegten Systems eine wichtige Rolle, da er der geometrische Ort aller derjenigen Punkte ist, die momentan keine Normalbeschleunigung haben.

Da der Wendekreis bei jeder Momentanlage des Gelenkvierecks resp. des beweglichen Systems zustande kommt, können wir zu seiner Darstellung auch die früher eingeführten veränderlichen Koordinatensysteme benutzen. Wir gehen zu diesem Zwecke von den Gleichungen der allgemeinen Bahnkurve in der Form [siehe Gl. (13) pag. 51]

$$x = a_0 + \xi_1, \qquad y = b_0 + \eta_1 \tag{2}$$

aus und führen die in (1) angedeuteten Differentiationen durch. Mit Rücksicht auf die Differentialbeziehungen (12) pag. 51 ergibt sich

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da_0}{dt} - \eta_1, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{db_0}{dt} + \xi_1,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a_0}{dt^2} - \xi_1, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2b_0}{dt^2} - \eta_1$$

und infolgedessen als Gleichung des Wendekreises im $(\xi_1 \eta_1)$-System:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_1 \left[\frac{db_0}{dt} - \frac{d^2a_0}{dt^2}\right] - \eta_1 \left[\frac{da_0}{dt} + \frac{d^2b_0}{dt^2}\right] + \frac{da_0}{dt}\frac{d^2b_0}{dt^2} - \frac{db_0}{dt}\frac{d^2a_0}{dt^2} = 0,^2 \tag{3}$$

und im Koordinatensystem $(\xi_2 \eta_2)$:

$$\xi_2^2 + \eta_2^2 - \xi_2 \left[\frac{db_0}{dt} + \frac{d^2a_0}{dt^2}\right] + \eta_2 \left[\frac{da_0}{dt} - \frac{d^2b_0}{dt^2}\right] = 0, \tag{4}$$

also nach (23a) pag. 43:

$$\xi_2^2 + \eta_2^2 - a_2\xi_2 - b_2\eta_2 = 0. \tag{4*}$$

---

[1] Traité des roulettes, Mémoires de l'Académie des sciences à Paris, 1706, p. 340.

[2] Vergl. M. Krause, a. a. O., pag. 8, Gl. (1).

Hieraus oder aus der Normalform

$$(4^{**}) \qquad \left[\xi_2 - \frac{a_2}{2}\right]^2 + \left[\eta_2 - \frac{b_2}{2}\right]^2 = \frac{a_2^2 + b_2^2}{4}$$

erkennt man zunächst, daß die Koordinaten des Wendekreismittelpunktes im $(\xi_2 \eta_2)$-System $\frac{a_2}{2}$ und $\frac{b_2}{2}$ sind und daß der Wendekreisdurchmesser, den wir mit q bezeichnen wollen, den Wert

$$(5) \qquad q = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

besitzt.

Wir wollen die Gleichung des Wendekreises noch in dem dritten unserer veränderlichen Koordinatensysteme, in welchem Polbahntangente und Polbahnnormale die Achsen sind, angeben. Mit Rücksicht auf (5) können wir die entsprechenden Transformationsgleichungen (16) p. 52 schreiben:

$$(6) \qquad \xi_2 = -\frac{1}{q}[b_2 \xi_3 + a_2 \eta_3], \qquad \eta_2 = \frac{1}{q}[a_2 \xi_3 - b_2 \eta_3]$$

und erhalten infolgedessen die Gleichung des Wendekreises in der Form:

$$(7) \qquad \xi_3^2 + \eta_3^2 + q \eta_3 = 0.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß der Wendekreis die Polbahntangente im Pol berührt und daß der sogenannte Wendepol (W), d. h. der zweite Schnittpunkt der Polbahnnormale mit dem Wendekreis, nach unserer Festsetzung auf der negativen Seite der Polbahnnormale liegt.

Die bisher angegebenen Gleichungen des Wendekreises gelten ganz allgemein für jede komplane Bewegung zweier unveränderlicher Systeme, wenn a_0 und b_0 die Koordinaten des Anfangspunktes des in der bewegten Ebene festen Koordinatensystems sind. Im Falle des Gelenkvierecks ist nun zufolge früher abgeleiteter Beziehungen:

$$a_0 = -a C_{14}, \qquad b_0 = a S_{14},$$

$$\frac{da_0}{dt} = -a\sigma S_{14}, \qquad \frac{db_0}{dt} = -a\sigma C_{14},$$

$$\frac{d^2 a_0}{dt^2} = -a[-\sigma^2 C_{14} + \sigma' S_{14}], \qquad \frac{d^2 b_0}{dt^2} = a[-\sigma^2 S_{14} - \sigma' C_{14}],$$

$$a_2 = a\sigma\tau[C_{14} + S_{14} \cot\gamma], \qquad b_2 = -a\sigma\tau[S_{14} - C_{14} \cot\gamma],$$

$$a_2^2 + b_2^2 = \frac{a^2 \sigma^2 \tau^2}{\sin^2 \gamma}, \qquad \sigma' = \sigma(1 - \sigma)\cot\gamma;$$

infolgedessen ergeben sich als Gleichungen des Wendekreises in den drei veränderlichen Koordinatensystemen:

$$\text{(I.)}\ \xi_1^2+\eta_1^2-a\sigma[(1+\sigma)C_{14}-(1-\sigma)S_{14}\cot\gamma]\xi_1+a\sigma[(1+\sigma)S_{14}+(1-\sigma)C_{14}\cot\gamma]\eta_1+a^2\sigma^3=0,$$

(8)
$$\text{(II.)}\ \xi_2^2+\eta_2^2-a\sigma\tau[C_{14}+S_{14}\cot\gamma]\xi_2+a\sigma\tau[S_{14}-C_{14}\cot\gamma]\eta_2=0,$$

$$\text{(III.)}\ \xi_3^2+\eta_3^2+\frac{a\sigma\tau}{\sin\gamma}\eta_3=0$$

und im festen Koordinatensystem (ξ, η)

(9)
$$\xi^2+\eta^2-a\sigma[(1+\sigma)C_{12}-(1-\sigma)S_{12}\cot\gamma]\xi+a\sigma[(1+\sigma)S_{12}+(1-\sigma)C_{12}\cot\gamma]\eta+a^2\sigma^3=0,$$

wobei zu bemerken ist, daß die letzte Gleichung aus Gl. (8, I) einfach durch Vertauschung der Koordinaten ξ_1, η_1 und ξ, η sowie der Größen S_{14}, C_{14} mit S_{12}, C_{12} hervorgeht.

Der Wendekreisdurchmesser q besitzt nach (8, III), vom Vorzeichen abgesehen, den Wert

$$q=\frac{a\sigma\tau}{\sin\gamma}$$

oder mit Rücksicht auf früher angegebene Relationen:

(10)
$$q=\frac{\overline{AP}\cdot\overline{\mathfrak{A}P}}{a\sin\gamma}=\frac{\overline{BP}\cdot\overline{\mathfrak{B}P}}{c\sin\alpha}.$$

Beachtet man ferner, daß

$$a\sigma\tau=-h\frac{\sin\beta\sin\delta}{\sin\alpha\sin(\beta-\delta)}$$

ist, so kann der Wendekreisdurchmesser auch geschrieben werden:

(11)
$$q=h\frac{\sin\beta\sin\delta}{\sin\alpha\sin\gamma\sin(\beta-\delta)}.$$[1]

Auf Grund dieser Darstellungen des Wendekreisdurchmessers läßt sich der Wendepol W einfach konstruieren. Die diesbezügliche Konstruktion stammt von M. Grübler[2] und ist folgendermaßen auszuführen:

---

[1] Vergl. R. Müller, Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, Festschrift, Braunschweig. 1897, pag. 62, Gl. (43), — unter Berücksichtigung der notwendigen Winkelvertauschungen.

[2] M. Grübler, Zur Konstruktion der Wendepunkte, Z. f. M. u. Ph., Bd. 29, 1884, p. 310.

Man ziehe durch den Pol P zu **AB** die Parallele, die die Verlängerung von AB in G trifft, und durch G die Parallele zu PH, die auf den Armen **A**A und **B**B die Punkte A_w und B_w ausschneidet. Die in diesen Punkten auf den Armen errichteten Lote schneiden sich auf der Polbahnnormale im Wendepol W.

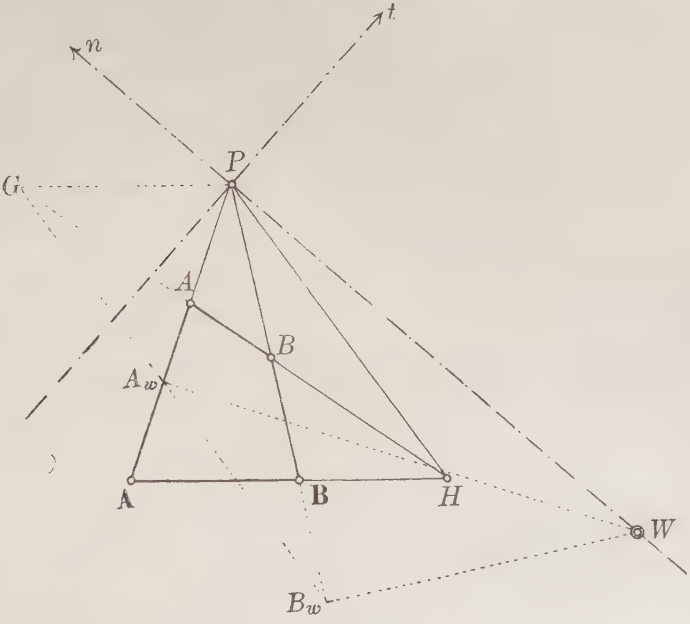

Fig. 8.

Man überzeugt sich leicht, daß auf Grund dieser Konstruktion der Wendekreisdurchmesser tatsächlich den in (11) angegebenen Wert annimmt. Grübler leitet diese einfache Konstruktion aus einer Beziehung her, die zwischen den vier Punkten **A**, A, P, A_w besteht[1], nämlich

$$\overline{A\,A_w} \cdot \overline{A\,\mathbf{A}} = \overline{PA}^2.$$

Diese folgt aber ohne weiteres aus der Darstellung (10); denn da $\overline{PA_w} = q \sin\gamma$ ist, ergibt sich aus (10) die Proportion

$$\overline{PA_w} : \overline{AP} = \overline{\mathbf{A}P} : \overline{\mathbf{A}A},$$

[1] A. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, pag. 462.

oder hieraus mittels korrespondierender Subtraktion

$$(\overline{PA}_w - \overline{AP}) : \overline{AP} = (\overline{\mathbf{A}P} - \overline{\mathbf{A}A}) : \overline{\mathbf{A}A},$$

d. h. aber

$$\overline{AA}_w : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{\mathbf{A}A},$$

also

$$\overline{AA}_w \cdot \overline{A\mathbf{A}} = \overline{PA}^2, \text{ w. z. b. w.}$$

Diese Grüblersche Konstruktion versagt, wenn die Koppel parallel zum Steg ist, also der Punkt H unendlich fern liegt. In diesem Falle muß man den Wendepol direkt mittels der aus der Darstellung (10) folgenden Proportionen

$$\overline{PA}_w : \overline{PA} = \overline{P\mathbf{A}} : \overline{\mathbf{A}A}$$

und

$$\overline{PB}_w : \overline{PB} = \overline{P\mathbf{B}} : \overline{\mathbf{B}B}$$

konstruieren. Eine sich hierauf gründende Konstruktion findet sich bei Allievi[1], die nun den Vorteil besitzt, auch bei unendlich fernem Punkt H ihre Gültigkeit zu behalten. Wir teilen sie hier mit, da wir sie später verwenden werden:

Man ziehe durch **A** und **B** zu $\mathbf{B}P$ und $\mathbf{A}P$ Parallelen, die PH in $\mathbf{A}'$ und $\mathbf{B}'$ schneiden. Die Verbindungslinien $\mathbf{A}'A$ und $\mathbf{B}'B$ treffen die Arme $\mathbf{B}B$ und $\mathbf{A}A$ in den Punkten B_w und A_w. Die in diesen Punkten auf den Armen errichteten Lote schneiden sich auf der Polbahnnormale im Wendepol W.

Beide Konstruktionen werden hinfällig, wenn

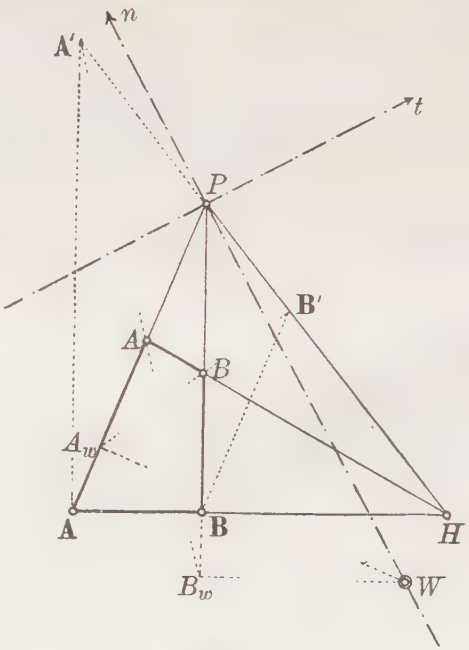

Fig. 9.

[1] Allievi, Cinematica, pag. 30, Fig. 14.

der Pol P unendlich fern liegt, wenn also die beiden Arme parallel sind. Nach den bei der Diskussion der Polkurven gefundenen Resultaten tritt dies ein für die Parameter

$$\mu_3 + iK', \qquad \mu_3 + K + iK',$$
$$\mu_3 + 3iK', \qquad \mu_3 + K + 3iK',$$

(reelle Lagen des Gelenkvierecks vorausgesetzt). Dann ist aber

$$S_{31} = 0, \quad C_{31} = \pm 1, \quad \sigma = \infty,$$

dagegen

$$\frac{\cot \gamma}{\sigma} = \pm \frac{a S_{24}}{c S_{23} S_{34}}, \qquad \frac{1-\sigma}{\sigma} = -\frac{d S_{34}}{b S_{23}}.$$

Unter solchen Umständen geht die Gleichung (9) des Wendekreises über in

$$\eta = -\frac{S_{12}}{C_{12}}\,\xi \pm \frac{bc}{d}\,\frac{S_{23}^2}{S_{24} C_{12}},$$

d. h. die entsprechenden Wendekreise arten in gerade Linien aus, und zwar überzeugt man sich leicht durch Berechnen der Grenzwerte $lim\left(\frac{S_{12}}{C_{12}}\right)$ und $lim\left(\frac{bc}{d}\,\frac{S_{23}^2}{S_{24} C_{12}}\right)$, daß dies die Asymptoten der Polkurve sind.

§ 8. Die vierpunktig berührende Tangente, der Ballsche Punkt und die Undulationskurve.

Fragt man sich, ob es bei einer bestimmten Koppellage eines Gelenkvierecks Punkte gibt, deren Bahnkurven in dem betreffenden Augenblick eine vierpunktig berührende Tangente besitzen, so ist zunächst klar, daß solche Punkte, wenn sie überhaupt existieren, auf dem Wendekreis der in Frage kommenden Koppellage liegen müssen, da ja für sie auch die Bedingung des dreipunktigen Berührens der Tangente, also $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, erfüllt sein muß. Als weitere Bedingung tritt nun hinzu, daß auch der dritte Differentialquotient der Null gleich wird. Es ist nun bekannt, daß im allgemeinen für jede Momentanlage nur ein solcher Punkt existiert, dessen Koordinaten den beiden Gleichungen

(1) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$$

Genüge leisten. Auf die Existenz dieses Punktes ist zuerst von R. Ball[1] hingewiesen worden, und er wurde daher von Mehmke[2] als der Ballsche Punkt bezeichnet. Da dieser Punkt ein sogenannter Undulationspunkt oder Flachpunkt[3] seiner Bahnkurve ist, nennt man den geometrischen Ort aller der Gesamtbewegung entsprechenden Ballschen Punkte Undulationskurve, Flachpunktkurve oder auch Ballsche Kurve. Die Punkte der Undulationskurve beschreiben also solche Bahnkurven, die im Verlaufe der Bewegung mindestens einmal eine vierpunktig berührende Tangente besitzen.

Der Ballsche Punkt bietet naturgemäß als Ausgangspunkt für die höheren Berührungen großes Interesse und ist infolgedessen vielfach behandelt worden. Besonders eingehend hat sich R. Müller[4] mit ihm beschäftigt und für das Gelenkviereck seine Konstruktion angegeben.[4] Für spezielle Fälle des Gelenkvierecks wurde von ihm auch die Undulationskurve untersucht, während allgemein für ebene unveränderliche Systeme ihre Gleichungen M. Krause[5] aufgestellt hat.

Da nun

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{N}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{dx}{dt}N' - 3N\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}$$

ist, nehmen — wieder mit der Beschränkung, daß nicht gleichzeitig $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ der Null gleich werden — die Bedingungsgleichungen (1) die Form an:

$$N = 0, \qquad N' = 0,$$

---

[1] Notes on applied mechanics, Proceedings of the R. Irish Acad., Ser. II, Bd. I, pag. 243 (1871); vergl. auch Schoenflies, Geometrie der Bewegung, pag. 193, Anm. 7; und Enzyklopädie der math. Wissensch. IV, 1, 2, pag. 212.

[2] Mehmke, Über die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene, Z. f. M. u. Ph. 35, pag. 70. — Siehe auch R. Müller, Beiträge usw., Festschrift, p. 51.

[3] R. Müller, Über einige Kurven usw., Z. f. M. u. Ph. 48 (1902), pag. 224.

[4] Siehe pag. 73 u. 74.

[5] M. Krause, Zur Theorie der ebenen unveränderlichen Systeme, Archiv der Math. u. Phys., III, XVI, 1.

also

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{dx}{dt}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3} = 0.$$

Die erste Gleichung stellt wie früher den Wendekreis dar; die zweite dagegen ist die nach t differenzierte Wendekreisgleichung und kann daher geschrieben werden:

$$(3) \qquad \left[\frac{d^3a_0}{dt^3} + \frac{da_0}{dt}\right]\xi_1 + \left[\frac{d^3b_0}{dt^3} + \frac{db_0}{dt}\right]\eta_1 + \frac{db_0}{dt}\frac{d^3a_0}{dt^3} - \frac{da_0}{dt}\frac{d^3b_0}{dt^3} = 0$$

oder im (ξ_2, η_2)-System vermöge der Transformationsgleichungen (14) auf pag. 52:

$$(4) \qquad a_3\xi_2 + b_3\eta_2 = 0^1,$$

wobei a_3 und b_3 die auf pag. 43 angegebene Bedeutung besitzen.

Hieraus erkennt man zunächst, daß der Ballsche Punkt außer auf dem Wendekreis auf einer Geraden liegt, die durch den Pol geht und mit der x-Achse, also dem Steg, einen Winkel χ_x bildet, der bestimmt ist durch

$$(5) \qquad \tan\chi_x = -\frac{a_3}{b_3}.$$

In dem auf Polbahntangente und Polbahnnormale bezogenen Koordinatensystem erhält man die Gleichung dieser Geraden in der Form

$$[a_2b_3 - a_3b_2]\xi_3 - [a_2a_3 + b_2b_3]\eta_3 = 0$$

oder

$$(6) \qquad \eta_3 = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_2a_3 + b_2b_3}\xi_3,$$

wodurch der Winkel χ_t bestimmt ist, den die Gerade, auf der der Ballsche Punkt liegt, mit der positiven Polbahntangente bildet, und zwar ist hiernach

$$(7) \qquad \tan\chi_t = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_2a_3 + b_2b_3}.$$

Die Parametergleichungen der Undulations- oder Flachpunktkurve ergeben sich nun, indem man aus der Wendekreisgleichung und ihrer Derivierten die Koordinaten des Ballschen Punktes wirklich berechnet. Dabei ist aber zu beachten, daß gemäß

---

[1] M. Krause, Zur Theorie der ebenen unveränderlichen Systeme, Archiv der Math. u. Phys., III, XVI, 1.

der auf pag. 52 gemachten Bemerkung nur die im festen Koordinatensystem (ξ, η) sich ergebenden Gleichungen als wirkliche Parametergleichungen der Undulationskurve angesehen werden können, da ja die Flachpunktkurve erst durch die Gesamtbewegung zustande kommt. In den veränderlichen Koordinatensystemen geben die betreffenden Gleichungen nur die Koordinaten des einer bestimmten Koppellage entsprechenden Ballschen Punktes an. Diese sind nach (6) pag. 69 und (7) pag. 63 im (ξ_3, η_3)-System:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \xi_3 &= -\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{(a_3^2 + b_3^2)\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\left[a_2 a_3 + b_2 b_3\right], \\ \eta_3 &= -\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{(a_3^2 + b_3^2)\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\left[a_2 b_3 - b_2 a_3\right]. \end{aligned}$$

im (ξ_2, η_2)-System:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_3^2 + b_3^2} b_3, \\ \eta_2 &= -\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_3^2 + b_3^2} a_3,^1 \end{aligned}$$

und schließlich im (ξ_1, η_1)-System:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_3^2 + b_3^2} b_3 + a_1 - a_0, \\ \eta_1 &= -\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_3^2 + b_3^2} a_3 + b_1 - b_0 \end{aligned}$$

oder

$$(10^*)\qquad \xi_1 = \frac{\mathbf{A}_0}{a_3^2 + b_3^2}, \quad \eta_1 = \frac{\mathbf{B}_0}{a_3^2 + b_3^2},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= a_2 b_3^2 - b_2 a_3 b_3 + a_1 a_3^2 + a_1 b_3^2 - a_0 a_3^2 - a_0 b_3^2, \\ \mathbf{B}_0 &= b_2 a_3^2 - a_2 a_3 b_3 + b_1 b_3^2 + b_1 a_3^2 - b_0 b_3^2 - b_0 a_3^2, \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, daß $\mathbf{B}_0$ aus $\mathbf{A}_0$ hervorgeht, indem man a_i mit b_i vertauscht.

Geht man nunmehr zum festen Koordinatensystem (ξ, η) über, so erhält man aus (10*) als Koordinaten des Ballschen Punktes und zugleich als Gleichungen der Undulationskurve:

---

[1] Siehe M. Krause, a. a. O., pag. 9.

$$(12)\qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{a_3^2+b_3^2}\Big[\mathbf{A}_0\cos t+\mathbf{B}_0\sin t\Big],\\ \eta &= -\frac{1}{a_3^2+b_3^2}\Big[\mathbf{A}_0\sin t-\mathbf{B}_0\cos t\Big]. \end{aligned}$$

Der ganze Gang dieser Rechnung bestätigt die bekannte Tatsache, daß die Undulationskurve zusammen mit der Polkurve die Hüllkurve aller der Gesamtbewegung entsprechenden Wendekreise bildet[1]. Denn nach bekannten Regeln findet man die Hüllkurve einer vorgelegten Kurvenschar, indem man die Gleichung dieser Schar nach dem in ihr enthaltenen Parameter differenziert und dann aus beiden Gleichungen den Parameter eliminiert — oder aber, die ursprüngliche Gleichung und ihre Derivierte stellen zusammen die Hüllkurve in Parameterform dar.

Zum Schluß wollen wir bei unseren allgemeinen Betrachtungen über den Ballschen Punkt und die Undulationskurve noch einen Satz nachweisen, der für die fünfpunktige Berührung von Bedeutung ist, und zwar wollen wir zu diesem Zwecke die Spitzen der Undulationskurve bestimmen. Aus den Gleichungen (12) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{(a_3^2+b_3^2)^2}\Big[\mathbf{A}_1\cos t-\mathbf{B}_1\sin t\Big],\\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{1}{(a_3^2+b_3^2)^2}\Big[\mathbf{A}_1\sin t+\mathbf{B}_1\cos t\Big], \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= (a_3^2+b_3^2)(\mathbf{A}_0'+\mathbf{B}_0)-2\mathbf{A}_0(a_3a_4+b_3b_4),\\ \mathbf{B}_1 &= (a_3^2+b_3^2)(\mathbf{A}_0-\mathbf{B}_0')+2\mathbf{B}_0(a_3a_4+b_3b_4) \end{aligned}$$

und $\mathbf{A}_0'$ und $\mathbf{B}_0'$ die Differentialquotienten der in (11) eingeführten Abkürzungen $\mathbf{A}_0$ und $\mathbf{B}_0$ nach t bedeuten. Mit Rücksicht auf früher abgeleitete Beziehungen [Gl. (24) pag. 44] ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= [a_3b_4-b_3a_4]\,[a_3(a_2b_3-b_2a_3)+b_3(a_2a_3+b_2b_3)],\\ \mathbf{B}_1 &= [a_3b_4-b_3a_4]\,[a_3(a_2a_3+b_2b_3)-b_3(a_2b_3-b_2a_3)], \end{aligned}$$

und infolgedessen wird

[1] Schoenflies, Geometrie der Bewegung, pag. 20; Encyklopädie der math. Wissensch., IV, 1, 2, pag. 212.

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{a_3 b_4 - b_3 a_4}{(a_3^2 + b_3^2)^2}\Big[\{a_3(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_3(a_2 a_3 + b_2 b_3)\}\cos t \\
&\qquad - \{a_3(a_2 a_3 + b_2 b_3) - b_3(a_2 b_2 - b_2 a_3)\}\sin t\Big], \qquad (13)\\
\frac{d\eta}{dt} &= -\frac{a_3 b_4 - b_3 a_4}{(a_3^2 + b_3^2)^2}\Big[\{a_3(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_3(a_2 a_3 + b_2 b_3)\}\sin t \\
&\qquad + \{a_3[a_2 a_3 + b_2 b_3) - b_3(a_2 b_3 - b_2 a_3)\}\cos t\Big].
\end{aligned}
$$

Hieraus erkennt man, daß die Undulationskurve Spitzen besitzt, wenn

$$a_3 b_4 - b_3 a_4 = 0 \qquad (14)$$

ist, da ja dann $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ gleichzeitig der Null gleich werden, und daß — nebenbei bemerkt — der Winkel φ_u, den die Undulationskurventangente mit der x-Achse, also dem Steg, bildet, bestimmt ist durch

$$\tan\varphi_u = -\frac{a_3(a_2 a_3 + b_2 b_3) - b_3(a_2 b_3 - b_2 a_3)}{a_3(a_2 b_3 - b_2 a_3) + b_3(a_2 a_3 + b_2 b_3)}. \qquad (15)$$

Die bisher für den Ballschen Punkt und die Undulationskurve angegebenen Resultate gelten ganz allgemein, d. h. für jede komplane Bewegung zweier ebener unveränderlicher Systeme.

Wir wollen nunmehr diese Resultate für den Fall des Gelenkvierecks spezialisieren, vor allem die Müllersche Konstruktion des Ballschen Punktes angeben und im Anschluß daran eine weitere einfache Konstruktion dieses Punktes mitteilen. Zu diesem Zwecke erinnern wir uns an die früher berechneten Ausdrücke (pag. 44 und 46):

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a\sigma\tau[C_{14} + S_{14}\cot\gamma], & a_3 &= -3a\sigma^2\tau\cot\gamma\,[C_{14} + S_{14}\Psi],\\
b_2 &= -a\sigma\tau[S_{14} - C_{14}\cot\gamma], & b_3 &= 3a\sigma^2\tau\cot\gamma\,[S_{14} - C_{14}\Psi];
\end{aligned}
$$

infolgedessen ist

$$
\begin{aligned}
a_2 b_3 - b_2 a_3 &= 3a^2\sigma^3\tau^2\cot\gamma\,[\cot\gamma - \Psi],\\
a_2 a_3 + b_2 b_3 &= -3a^2\sigma^3\tau^2\cot\gamma\,[1 + \Psi\cot\gamma].
\end{aligned}
$$

Da ferner nach (25a) pag. 44

$$\frac{db_0}{dt}\frac{d^3a_0}{dt^3} - \frac{da_0}{dt}\frac{d^3b_0}{dt^3} = 3a^2\sigma^3\tau\cot\gamma$$

ist, nimmt die Gleichung der durch den Pol gehenden Geraden, auf der der Ballsche Punkt liegt, in den drei veränderlichen Koordinatensystemen die folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
&\text{(I.)} \quad [C_{14} + S_{14}\Psi]\,\xi_1 - [S_{14} - C_{14}\Psi]\,\eta_1 - a\sigma = 0,\\
(16)\qquad &\text{(II.)} \quad [C_{14} + S_{14}\Psi]\,\xi_2 - [S_{14} - C_{14}\Psi]\,\eta_2 = 0,\\
&\text{(III.)} \quad [\cot\gamma - \Psi]\,\xi_3 + [1 + \Psi\cot\gamma]\,\eta_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Vertauscht man schließlich in (16, I) ξ_1, η_1 mit ξ, η und C_{14}, S_{14} mit C_{12}, S_{12}, so erhält man als Gleichung dieser Geraden im festen Koordinatensystem (ξ, η):

$$[C_{12} + S_{12}\Psi]\,\xi - [S_{12} - C_{12}\Psi]\,\eta - a\sigma = 0. \tag{17}$$

Die Winkel χ_t und χ_x, die die Gerade des Ballschen Punktes mit der Polbahntangente und der Stegrichtung bildet, sind hiernach bestimmt durch

$$\tan\chi_t = -\frac{\cot\gamma - \Psi}{1 + \Psi\cot\gamma}, \qquad \tan\chi_x = \frac{C_{14} + S_{14}\Psi}{S_{14} - C_{14}\Psi}. \tag{18}$$

Beachtet man, daß

$$\Psi = \frac{\cot\alpha\,\cot^2\gamma + \cot\delta}{\cot\gamma\,[\cot\alpha - \cot\delta]}$$

ist, so ergibt sich nach leichten Rechnungen für den ersten dieser Winkel die von R. Müller[1] in verschiedenen seiner Arbeiten hergeleitete Beziehung

$$\tan\chi_t = \frac{\cot\delta}{\cot\alpha\,\cot\gamma} = \frac{\tan\alpha\,\tan\gamma}{\tan\delta}. \tag{19}$$

Hierauf gründet R. Müller[1] die folgende einfache Konstruktion des Ballschen Punktes (Fig. 10):

Man errichte im Pol P auf PH die Senkrechte, die den Steg **AB** in D_1 und die Parallele durch H zu **B**P in D_2 schneidet, lege durch D_1 und D_2 zwei Parallelen und bestimme deren Schnittpunkte E_1 und E_2 mit der Polbahnnormale — in der Figur fällt D_1E_1 mit **AB** zusammen. Zieht man schließlich $E_1F_1 \parallel t$ bis **B**P, $F_1F_2 \parallel n$ und $E_2F_2 \parallel t$, so ist der Ballsche Punkt K der Fußpunkt des Lotes aus dem Wendepol W auf die Gerade PF_2.

Eine weitere ebenfalls sehr einfache Konstruktion des Ballschen Punktes läßt sich nun auf Grund der Gleichung (18) herleiten. Die dort angegebene Darstellung von $\tan\chi_t$ mittels

[1] Z. f. M. u. Ph., 42, p. 259 oder Festschrift, Braunschweig, p. 63.

der ursprünglich ganz willkürlich als Abkürzung eingeführten Größe Ψ läßt vermuten, daß diese Größe gleich der trigonometrischen Kotangente eines Winkels gesetzt werden kann.

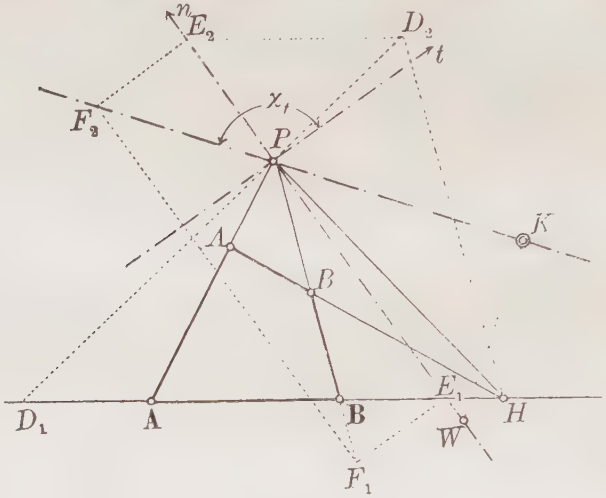

Fig. 10.

Wir führen infolgedessen zweckmäßigerweise an Stelle dieser Abkürzung Ψ einen Hilfswinkel ψ ein durch die Gleichung

$$\cot\psi = -\Psi = -\frac{\cot\alpha\cot^2\gamma + \cot\delta}{\cot\gamma\,[\cot\alpha - \cot\delta]} \tag{20}$$

und erhalten dann nach (18)

$$\chi_t = \gamma + \psi. \tag{21}$$

Aus (20) folgt nun

$$\sin\psi = \frac{\cot\gamma\,[\cot\alpha - \cot\delta]}{\sqrt{(1+\cot^2\gamma)(\cot^2\delta + \cot^2\alpha\cot^2\gamma)}},$$

$$\cos\psi = -\frac{\cot\alpha\cot^2\gamma + \cot\delta}{\sqrt{(1+\cot^2\gamma)(\cot^2\delta + \cot^2\alpha\cot^2\gamma)}},$$

während sich aus (19) ergibt:

$$\sin\chi_t = \frac{\cot\delta}{\sqrt{\cot^2\delta + \cot^2\alpha\cot^2\gamma}}, \qquad \cos\chi_t = \frac{\cot\alpha\cot\gamma}{\sqrt{\cot^2\delta + \cot^2\alpha\cot^2\gamma}};$$

folglich ist

$$\frac{\sin\psi}{\sin\chi t} = \frac{\cot\gamma\,[\cot\alpha - \cot\delta]}{\cot\delta\sqrt{1+\cot^2\gamma}} = -\frac{\cos\gamma\sin(\alpha-\delta)}{\sin\alpha\cos\delta} = -\frac{S_{14}\cos\gamma}{\sin\alpha\cos\delta}$$

oder mit Rücksicht auf früher abgeleitete Beziehungen [(9) und (10) pag. 17]:

$$\frac{\sin\psi}{\sin\chi_t} = \frac{h\cos\gamma}{\overline{\mathbf{A}H}\cos\delta}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{\overline{\mathbf{A}H}\cos\delta}{\cos\gamma} = h_1,$$

so folgt schließlich die einfache Beziehung

$$\frac{\sin\psi}{\sin\chi_t} = \frac{h}{h_1}, \tag{22}$$

die nun in Verbindung mit der Gleichung (21) zu einer einfachen Konstruktion des Ballschen Punktes benutzt werden kann. Denn hiernach sind die Winkel χ_t und ψ durch ein Dreieck bestimmt, das die Strecken h und h_1 als Seiten und γ als eingeschlossenen Winkel besitzt, und zwar ist dann, wie aus (21) und (22) folgt, der Winkel ψ der der Seite h gegenüberliegende Innenwinkel, dagegen χ_t der der Seite h_1 gegenüberliegende Außenwinkel. Dieses Dreieck kann für jede beliebige Koppellage des Gelenkvierecks leicht konstruiert werden. Die Strecke h_1 findet man dadurch, daß man von **A** auf $PH = h$ das Lot $\mathbf{A}M$ fällt und mit der durch H zu $\mathbf{B}P$ gezogenen Parallelen schneidet. Ist dieser Schnittpunkt L, so ist $\triangle HPL$ das gesuchte Dreieck, und es ist infolgedessen

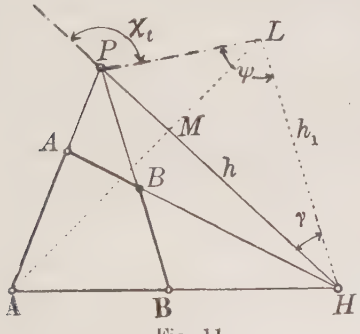

Fig. 11.

$$\angle PLH = \psi, \qquad \angle HPL = \pi - \chi_t.$$

Der Ballsche Punkt kann also hiernach konstruiert werden, indem man den auf diese Weise gefundenen Winkel χ_t an die positive Polbahntangente anträgt. Die entsprechende Konstruktion kann unter Vermeidung des Winkelantragens folgendermaßen ausgeführt werden (Fig. 12):

Man fälle von **A** das Lot **A***M* auf *PH*, das die Parallele durch *H* zu **B***P* in *L* schneidet, sodann von *L* das Lot *LN* auf die Polbahntangente und ziehe zu *MN* durch den Pol *P* die Senkrechte. Fällt man schließlich vom Wendepol *W* auf diese Senkrechte das Lot, so ist der Fußpunkt *K* der gesuchte Ballsche Punkt.

Wie man sich leicht überzeugt, kann man die Konstruktion auch in der Weise ausführen, daß man an Stelle des Punktes

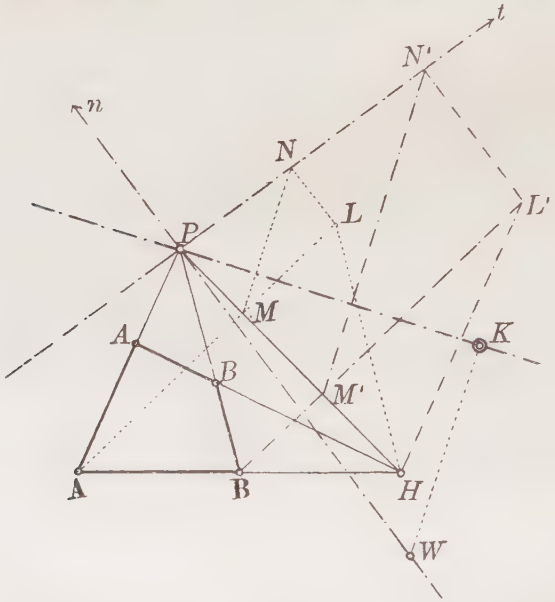

Fig. 12.

A den Punkt **B** benutzt, was sich einfach dadurch äußert, daß man in der soeben angegebenen Konstruktionsbeschreibung die beiden Buchstaben **A** und **B** miteinander vertauscht. (In der Figur strich-punktiert.)

Zum Schluß wollen wir noch die Gleichungen der Undulationskurve für das Gelenkviereck angeben, und zwar mit Hilfe der Winkel α, β, γ, δ, um vor allem daraus die Müllersche Bedingung herleiten zu können, unter der der

Ballsche Punkt auf die Koppel fällt. Die Gleichungen (12) pag. 71 nehmen nach einigen Rechnungen und Umformungen mit Rücksicht auf die schon mehrfach erwähnten Beziehungen auf pag. 43 bis 46 die folgende Form an:

$$\xi = a[(\cot\delta - \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma)^2 + (\cot\alpha\cot\delta + \cot\beta\cot\gamma)(\cot\alpha\cot\gamma + \cot\beta\cot\delta)] \cdot Q,$$

(23)

$$\eta = a[\cot\alpha - \cot\beta][\cot\delta - \cot\gamma][\cot\delta - \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma] \cdot Q,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$Q = \frac{(\cot\alpha - \cot\delta)^2 \sin\alpha \sin\beta}{(\cot\beta - \cot\delta)^2(\cot^2\delta + \cot^2\alpha\cot^2\gamma)}.$$

Der Ballsche Punkt fällt auf die Koppel für $\eta = 0$, also wenn

$$[\cot\alpha - \cot\beta][\cot\delta - \cot\gamma][\cot\delta - \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma] = 0$$

ist. Verschwinden die beiden ersten Faktoren, so liegt kein eigentliches Gelenkviereck vor, da dann jedesmal einer der Punkte **A** oder A unendlich fern liegt. Es bleibt daher als Bedingung dafür, daß der Ballsche Punkt auf die Koppel fällt, die Gleichung

$$\cot\delta = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma;^1$$

dann ist aber

$$\xi = a\frac{\cos\alpha\cos^2(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos^2(\alpha+\gamma)}$$

und

$$\chi_t = 90^0 - \beta.^1$$

§ 9. Die fünfpunktig berührende Tangente.

Soll die Bahnkurve des Ballschen Punktes nicht nur vier, sondern fünf aufeinanderfolgende Punkte mit ihrer Tangente gemeinsam haben, so muß außer den für den Ballschen Punkt geltenden Bedingungen noch

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0 \tag{1}$$

sein, d. h., da die Koppelkurve in Parameterform gegeben ist,

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 N'' - \frac{dx}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}N - 7\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}N' + 15\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 N}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^7} = 0.$$

[1] Vergl. R. Müller, Beiträge usw., Festschrift, pag. 67.

Es ergibt sich also außer

$$N = 0, \quad N' = 0$$

für die fünfpunktige Berührung die weitere Bedingungsgleichung

$$N'' = 0, \tag{2}$$

wobei wieder wie früher vorauszusetzen ist, daß nicht gleichzeitig $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ der Null gleich werden.

Wir wollen die hiernach notwendigen Differentiationen nicht besonders durchführen, sondern geben sofort das von M. Krause[1] aufgestellte allgemeine Resultat — mit den bei unserer Bezeichnung notwendigen Änderungen — an:

„Die hinreichende und notwendige Bedingung für eine fünfpunktige Berührung lautet:

$$a_3 b_4 - b_3 a_4 = 0; \tag{3}$$

die Koordinaten des Ballschen Punktes nehmen die Werte an:

$$\xi_2 = \frac{a_2 b_4 - b_2 a_4}{a_4^2 + b_4^2} b_4, \qquad \eta_2 = -\frac{a_2 b_4 - b_2 a_4}{a_4^2 + b_4^2} a_4 \tag{4}$$

und genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_4 \xi_2 + b_4 \eta_2 &= 0, \\ b_4 \xi_2 - a_4 \eta_2 &= a_2 b_4 - b_2 a_4.\text{“} \end{aligned} \tag{5}$$

Wir erinnern uns nun zunächst an das im vorigen Abschnitt (pag. 72) gefundene Resultat, daß die Undulationskurve Spitzen besitzt, wenn die entsprechenden Parameter der Gleichung

$$a_3 b_4 - b_3 a_4 = 0$$

Genüge leisten, d. h. also derselben Bedingung, unter der eine fünfpunktige Berührung stattfindet. Hierin ist der bekannte allgemein gültige Satz[2] enthalten:

„Die Spitzen der Undulationskurve beschreiben Bahnkurven, die im Verlaufe der Bewegung mindestens eine Bahnstelle mit fünfpunktig berührender Tangente besitzen.“

[1] M. Krause, a. a. O., pag. 9.

[2] R. Müller, Z. f. M. u. Ph., 43, pag. 37, und Enzyklopädie der math. Wissensch., IV, 1, 2, pag. 212.

Um nun die Bedingung (3) wieder für den Fall des Gelenkvierecks zu spezialisieren, benutzen wir die Beziehungen [vergl. (27) und (28) pag. 45]:

$$a_3 = -a[\Phi_1 C_{14} + \Psi_2 S_{14}], \quad a_4 = -a[(\Phi_1' - \sigma\Psi_2) C_{14} + (\Psi_2' + \sigma\Phi_1) S_{14}],$$
$$b_3 = a[\Phi_1 S_{14} - \Psi_2 C_{14}], \quad b_4 = a[(\Phi_1' - \sigma\Psi_2) S_{14} - (\Psi_2' + \sigma\Phi_1) C_{14}];$$

infolgedessen geht die Gleichung (3) über in

$$\Phi_1\Psi_2' - \Phi_1'\Psi_2 + \sigma[\Phi_1^2 + \Psi_2^2] = 0, \tag{6}$$

wobei nun nach (30) und (32) pag. 45

$$\Phi_1 = 3\sigma^2\tau\cot\gamma, \qquad \Psi_2 = 3\sigma^2\tau\Psi\cot\gamma,$$

also

$$\Psi_2 = \Phi_1 \cdot \Psi \tag{7}$$

ist. Die Gleichung (6) nimmt daher die Gestalt an:

$$\Phi_1^2[\Psi' + \sigma(1 + \Psi^2)] = 0 \tag{8}$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von Ψ [Gl. (20) pag. 42] und den Wert von Ψ' [Gl. (21) pag. 43] nach einigen leichten Rechnungen

$$(1 + \cot^2\gamma)(\cot\alpha - \cot\delta)(\cot\alpha - \cot\beta)(\cot\gamma - \cot\delta)[\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma + 2\cot\delta + \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma] = 0.$$

Da die ersten Faktoren bei einem eigentlichen Gelenkviereck nicht verschwinden können, bleibt als Bedingung für fünfpunktige Berührung:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma + 2\cot\delta + \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma = 0. \tag{9}$$

Diese Gleichung hat R. Müller auf verschiedene Weise hergeleitet, und zwar das eine Mal mit Hilfe der höheren Wendepole[1], das andere Mal bei Behandlung der Burmesterschen Punkte[2]. Bei dieser Gelegenheit gibt er auch die Konstruktion eines Gelenkviereckes an, bei dem die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in der betreffenden Koppellage der Bedingung (9) genügen.

---

[1] R. Müller, Beiträge usw., Festschrift, pag. 64.

[2] R. Müller, Konstruktion der Burmesterschen Punkte, Z. f. M. u. Ph., 38, pag. 130, 131 ff.

Kapitel IV.

Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente.

§ 10. Allgemeines.

Wie schon früher erwähnt, ist beim Gelenkviereck die sechspunktige Berührung die höchste überhaupt mögliche, da die Koppelkurve sechsten Grades ist und infolgedessen eine gerade Linie höchstens sechs Punkte mit ihr gemeinsam haben kann.

Besonders eingehend hat sich R. Müller mit dem Problem der sechspunktigen Berührung und im Zusammenhang damit mit der sechspunktigen angenäherten Geradführung beschäftigt. Vor allem hat er den Fall, daß der geradgeführte Punkt, also der Ballsche Punkt, auf der Koppel liegt, ausführlich behandelt, indem er für diesen speziellen Fall die Bedingungsgleichungen angibt, die zwischen den Seiten des Gelenkvierecks dann bestehen müssen [siehe pag. 83 (7)]. Dagegen stellen sich im allgemeinen Falle, wenn der geradgeführte Punkt nicht auf der Koppel liegt, Eliminationsschwierigkeiten ein, sodaß es bis jetzt noch nicht gelungen ist, die allgemeinen Bedingungsgleichungen anzugeben, denen die Seiten eines Gelenkvierecks genügen müssen, damit der zu einer bestimmten Koppellage gehörige Ballsche Punkt eine sechspunktige genaue Geradführung bewirkt, d. h. daß er eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchläuft. Auch bei der im folgenden angewendeten Behandlungsweise des Problems mittels elliptischer Funktionen treten diese Schwierigkeiten auf, sodaß auf die Durchführung des allgemeinen Falles verzichtet werden mußte. Dagegen konnten in einigen speziellen Fällen die entsprechenden Seitenrelationen aufgestellt werden, wobei allerdings zu bemerken ist, daß die dazu gehörigen Koppellagen zum Teil als geradführend

in der Literatur schon bekannt sind, aber in der Regel so angeführt und verwendet werden, daß die betreffende Geradführung eine vier- bis sechspunktige angenäherte Geradführung ist, während durch unsere Seitenrelationen Gelenkvierecke bestimmt werden, die in diesen Koppellagen sechspunktige Berührungen, d. h. sechspunktige genaue Geradführungen, bewirken, aus denen allerdings dann, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, durch geringe Änderungen der Seitenverhältnisse und der Lage des Ballschen Punktes jene angenäherten Geradführungen hervorgehen.

Außer diesen speziellen Fällen konnte noch ein weiterer Fall angegeben werden, der, soviel bekannt, in der Literatur noch nicht behandelt worden ist.

Wir würden nun zu den für die sechspunktige Berührung geltenden Bedingungsgleichungen gelangen, wenn wir die bisher angewendete Methode fortsetzen. Es würde zu den für die fünfpunktige Berührung geltenden Bedingungungen noch hinzutreten

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = 0 \tag{1}$$

oder, wenn man Parameterdarstellung voraussetzt,

$$N''' = 0. \tag{2}$$

Man gelangt also zu der Bedingung der sechspunktigen Berührung, wenn man die für fünfpunktige Berührung gefundene Bedingung nochmals nach dem Parameter der Koppelkurve differenziert.

Diese Methode des fortgesetzten Differenzierens kann ja beliebig weit geführt werden, vorausgesetzt, daß nicht durch den Grad der Koppelkurve dem Prozeß von selbst ein Ende gesetzt ist. Die sich hiernach ergebenden Bedingungen hat M. Krause in seinem schon mehrfach zitierten Aufsatz ganz allgemein für die n-punktige Berührung angegeben, und zwar faßt er die entsprechenden Resultate in den folgenden Satz[1] zusammen:

„Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für eine n-punktige Berührung lauten:

$$a_3 b_r - b_3 a_r = 0, \quad \text{für } r = 4, 5, \ldots n-1.$$

[1] M. Krause, a. a. O., pag. 10.

Die Koordinaten der betreffenden Punkte leisten den Gleichungen Genüge:

$$\xi_2 a_r + \eta_2 b_r = 0,$$
$$\xi_2 b_r - \eta_2 a_r = a_2 b_r - b_2 a_r, \quad \text{für } r = 3, 4 \ldots n-1.\text{“}$$

Für die sechspunktige Berührung würden demnach die entsprechenden Bedingungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} a_3 b_4 - b_3 a_4 &= 0, \\ a_3 b_5 - b_3 a_5 &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

und zwar entsteht die zweite dieser Gleichungen einfach durch Differentiation aus der ersten. Führt man diese Differentiation unter Verwendung der im ersten Kapitel (pag. 40) berechneten Differentialquotienten von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach t an der für die fünfpunktige Berührung gefundenen Winkelbeziehung

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma + 2\cot\delta + \cot\alpha \cot\beta \cot\gamma = 0 \tag{4}$$

wirklich aus, so gelangt man nach einigen Rechnungen zu der von R. Müller[1] auf verschiedenen Wegen hergeleiteten Relation zwischen den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi, \tag{5}$$

der also diese vier Winkel genügen müssen, damit in der dadurch charakterisierten Koppellage der Ballsche Punkt eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchläuft. Die Gleichung (4) geht dann über in

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0 \tag{6}$$

und vereinfacht sich noch weiter, wenn der Ballsche Punkt auf der Koppel liegt. R. Müller[1] gelangt für diesen speziellen Fall zu dem Resultat:

„In jeder Systemlage, in welcher ein Punkt der Koppelgeraden eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchläuft, bilden die drei beweglichen Glieder des Vierecks — oder deren Verlängerungen — ein gleichseitiges Dreieck“

und erhält dementsprechend die folgenden Seitenrelationen:

[1] R. Müller, Beiträge etc., Festschrift, pag. 66ff.

$$(7)\qquad \begin{gathered} a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-3abc\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\} \\ +15a^2b^2c^2=0, \\ d=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-abc(a+b+c)}{3abc}. \end{gathered}$$

Wir wollen nunmehr, wie schon früher angekündigt, im Gegensatz zu dieser soeben kurz skizzierten Behandlungsweise die sechspunktige Berührung mit Hilfe des Liouvilleschen Satzes[1]:

„Bei einer jeden elliptischen Funktion unterscheidet sich die Summe der inkongruenten Nullpunkte von der Summe der Unendlichkeitspunkte nur um Vielfache der Perioden"

zu lösen versuchen.

Zuvor sei aber an dieser Stelle auf einige kurze von R. Müller[2] eingeführte Bezeichnungsweisen hingewiesen, von denen wir im folgenden ebenfalls des öfteren Gebrauch machen werden, und zwar zitieren wir der Einfachheit halber R. Müller selbst[2]:

„Um uns kürzer ausdrücken zu können, wollen wir jede Koppelkurve, die eine sechspunktig berührende Tangente besitzt, als gestreckt bezeichnen. Wird eine solche Kurve von einem Punkte der Koppelgeraden beschrieben, so ist sie symmetrisch in bezug auf das feste Glied des Vierecks und hat demnach zwei sechspunktig berührende Tangenten; wir nennen sie deshalb doppelt gestreckt, im Gegensatze zur einfach gestreckten Koppelkurve, die von einem außerhalb der Koppelgeraden liegenden Punkte erzeugt wird. Wenn ferner ein Kurbelmechanismus die Eigenschaft hat, daß ein Punkt der Kurbelebene eine gestreckte Koppelkurve beschreibt, so möge unter Hauptlage diejenige Lage der drei beweglichen Glieder verstanden werden, bei welcher der betreffende Punkt sich gerade in der ausgezeichneten Bahnstelle befindet."

[1] Siehe u. a. E. Weisse, a. a. O., pag. 48.

[2] R. Müller, Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente, Z. f. M. u. Ph., 46, pag. 330.

Der oben angegebene Liouvillesche Satz gestattet nun vor allem, ohne weiteres diejenigen Parameterwerte zu ermitteln, bei denen überhaupt nur eine sechspunktige Berührung oder Geradführung möglich ist, die wir entsprechend der Müllerschen Bezeichnungsweise kurz Hauptlagenparameter oder Hauptparameter nennen wollen. Ob allerdings die durch diese Parameter charakterisierten Hauptlagen bei einem willkürlich vorgelegten Gelenkviereck eingenommen werden können, ist eine andere Frage, deren Beantwortung stets eine besondere Untersuchung erfordert. Im allgemeinen wird dies eben nur unter gewissen Bedingungen, denen die Seiten genügen müssen, stattfinden können. Es kann aber unter Umständen auch der Fall eintreten, daß es zu einem gewissen Hauptparameter keine entsprechenden Gelenkvierecke gibt, was sich dadurch bemerkbar machen würde, daß der sich ergebenden Seitenrelation keine reellen Größen genügen können oder daß dem betreffenden Hauptparameter keine relle Koppellage entspricht.

Um nun auf Grund des Liouvilleschen Satzes die Hauptparameter zu finden, stellen wir die folgenden Betrachtungen an:

Die Koppelkurve werde von einer geraden Linie geschnitten; dann besteht zwischen den Parametern der sechs Schnittpunkte, die wir mit ϑ_r $(r = 1, 2, \ldots 6)$ bezeichnen wollen, und den sechs Unendlichkeitspunkten Θ_r $(r = 1, 2, \ldots 6)$ der Koppelkurve nach dem Liouvilleschen Satze die Relation:

$$(8) \qquad \sum_1^6 r\, \vartheta_r = \sum_1^6 r\, \Theta_r + 2mK + 4niK'.$$

Nun ist aber nach (2) pag. 58 die Summe der sechs Unendlichkeitspunkte der Koppelkurve gleich $-2\nu + 12iK'$, infolgedessen wird

$$(9) \qquad \sum_1^6 r\, \vartheta_r = -2\nu + 2mK + 4m'iK', \quad \nu = \mu_2 - \mu_3.$$

Diese Beziehung gilt ganz allgemein für die Parameter der sechs Schnittpunkte, die eine beliebige Gerade mit der Koppelkurve besitzt. Soll nun aber diese Gerade die Koppelkurve

in einem ihrer Punkte sechspunktig berühren, so fallen die ursprünglich getrennt liegenden sechs Schnittpunkte in diesen Punkt zusammen, und infolgedessen müssen auch die zugehörigen Parameter einander gleich werden. Schreiben wir daher kurz ϑ für einen solchen Parameter, bei welchem eine solche sechspunktige Berührung stattfinden kann, so gilt für ihn die Gleichung

$$6\vartheta = -2v + 2mK + 4m'iK'$$

oder

$$\vartheta = -\frac{v}{3} + \frac{2mK + 4m'iK'}{6}, \tag{10}$$

wobei nun für m und m' alle ganzen Zahlen zu wählen sind, die noch Parameterwerte innerhalb des Periodenparallelogramms liefern. Man überzeugt sich leicht, daß dies für die Zahlenwerte 0, 1, 2 . . 5 der Fall ist, sodaß es im allgemeinen 36 Hauptparameter gibt, von denen aber im wesentlichen nur 18 in Frage kommen, da die übrigen 18 nur durch Vermehrung um $2iK'$ aus den ersteren hervorgehen, also die entsprechenden symmetrischen Koppellagen charakterisieren. Ferner kann man diese 18 Parameter wieder in zwei Gruppen zu je 9 teilen, und zwar ergeben sich die Parameter der zweiten Gruppe aus denen der ersten durch Vermehrung um K. Man erhält daher für die **36 Hauptparameter** die folgende Tabelle:

(11)

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$m'=0$	$-\frac{v}{3}$	$-\frac{v}{3}+\frac{K}{3}$	$-\frac{v}{3}+\frac{2K}{3}$	Vermehrung der 9 ersten Parameter um K		
$m'=1$	$-\frac{v}{3}+\frac{2iK'}{3}$	$-\frac{v}{3}+\frac{K}{3}+\frac{2iK'}{3}$	$-\frac{v}{3}+\frac{2K}{3}+\frac{2iK'}{3}$			
$m'=2$	$-\frac{v}{3}+\frac{4iK'}{3}$	$-\frac{v}{3}+\frac{K}{3}+\frac{4iK'}{3}$	$-\frac{v}{3}+\frac{2K}{3}+\frac{4iK'}{3}$			
$m'=3$	Vermehrung der 9 ersten Parameter um $2iK'$			Vermehrung der 9 ersten Parameter um $K+2iK'$		
$m'=4$						
$m'=5$						

Man hätte nunmehr diese Hauptparameter in die für fünfpunktige Berührung aufgestellte Bedingungsgleichung einzusetzen

und zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sie Wurzeln dieser Gleichung sind. Aus der obigen Tabelle erkennt man nun, daß die Hauptparameter im wesentlichen durch die Drittelperioden plus einer Konstanten $\left(-\frac{\nu}{3}\right)$ dargestellt werden, sodaß es auf die Kenntnis der Wurzeln der allgemeinen Dreiteilungsgleichung der elliptischen Funktionen ankommt, um das Problem lösen zu können. Ist $sn\nu$ bekannt und setzt man $sn\frac{\nu}{3} = x$, so handelt es sich demnach um die Wurzeln der Gleichung

$$sn\nu = \frac{x[3-4(1+x^2)x^2+6x^2x^4-x^4x^8]}{1-6x^2x^4+4x^2(1+x^2)x^6-3x^4x^8}, \tag{12}$$

die sämtlich dargestellt werden können in der Form

$$(-1)^{m+n} sn\left[\frac{\nu}{3} + \frac{2mK+2niK'}{3}\right],$$

wenn m und n die Werte $-1, 0, +1$ durchlaufen[1].

Es würde also hiernach im wesentlichen die Aufgabe entstehen, die für fünfpunktige Berührung geltende Bedingungsgleichung in $x = sn\Theta$ darzustellen und aus ihr und der allgemeinen Dreiteilungsgleichung (12) x zu eliminieren, oder mit anderen Worten, die Bedingung aufzustellen, wann die beiden Gleichungen mindestens eine gemeinsame Wurzel haben, d. h. also die Resultante beider Gleichungen zu bilden.

Es stellen sich nun im allgemeinen Falle, wie schon oben bemerkt wurde, bedeutende Schwierigkeiten in bezug auf die Durchführung dieser Rechnungen und Eliminationen ein, sodaß wir uns mit der Angabe dieser allgemeinen Gesichtspunkte begnügen und im folgenden vor allem einige spezielle Fälle behandeln wollen.

§ 11. Die speziellen Fälle $b = c$, $a = b$, $c = a$, $a = b = c$.

Es liegt zunächst nahe, zu versuchen, die als Wurzeln der allgemeinen Dreiteilungsgleichung auftretenden Hauptparameter auf die Wurzeln der speziellen Dreiteilungsgleichung

[1] Vergl. u. a. L. Heinze, Beiträge zur Anwendung der Dreiteilung der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung, Archiv der Math. u. Phys., 70, 1884, pag. 3 u. 15.

zurückzuführen, also auf reine Drittelperioden ohne die additive Konstante $\left(-\frac{\nu}{3}\right)$. Die allgemeine Dreiteilungsgleichung geht nun in die spezielle

(1) $$x\,[3-4\,(1+\varkappa^2)x^2+6\varkappa^2x^4-\varkappa^4x^8]=0$$

über, wenn

$$\nu=2mK+2niK'$$

gesetzt wird, wobei für m und n wieder die Werte $-1,0,+1$ zu wählen sind. Nun ist aber

$$\nu=\mu_2-\mu_3$$

und

(2)
$$sn\,\mu_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_2q_4}{ac}},\quad cn\,\mu_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{12}(-p_{14})}{ac}},\quad dn\,\mu_2=\sqrt{\frac{p_{12}(-p_{14})}{q_1q_3}},$$
$$sn\,\mu_3=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_3q_4}{ab}},\quad cn\,\mu_3=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{13}(-p_{14})}{ab}},\quad dn\,\mu_3=\sqrt{\frac{p_{13}(-p_{14})}{q_1q_2}},$$

also müßte

$$\mu_2=\mu_3+2mK+2niK'$$

werden. Infolge der Vorzeichen in (2) können aber nur die Kombinationen $m=+1,\ n=0$ und $m=-1,\ n=0$ gewählt werden, also

(3) $$\mu_2=\mu_3\pm 2K';$$

dann folgt aber aus (2) für die Seiten des Gelenkvierecks die Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_2q_4}{ac}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q_3q_4}{ab}}$$

oder nach einigen Umformungen

$$p_{14}(b-c)=0,$$

also

(4)
$$\text{(I)}\quad a+d=b+c,$$
$$\text{(II)}\quad b=c.$$

Im ersten Falle wird $\varkappa^2=1$; da dann die elliptischen Funktionen ausarten, scheidet dieser Fall für unsere Betrachtungen aus. Dagegen wollen wir uns nunmehr mit dem Fall $b=c$ weiter beschäftigen.

Es wird jetzt

(5)
$$q_1=2b-(a-d),\qquad p_0=2b+(a+d),$$
$$q_2=a+d,\qquad p_{12}=a-d,$$
$$q_3=a+d,\qquad p_{13}=a-d,$$
$$q_4=2b+(a-d),\qquad -p_{14}=2b-(a+d),$$

also $q_2 = q_3, \quad p_{12} = p_{13},$

und infolgedessen, entsprechend der Annahme (3):

$$sn\mu_2 = -sn\mu_3, \quad cn\mu_2 = -cn\mu_3, \quad dn\mu_2 = dn\mu_3;$$

$$(6) \quad sn\nu = 0, \qquad cn\nu = -1, \qquad dn\nu = 1, \quad \nu = \pm 2K;$$

$$sn\mu = \frac{\sqrt{4b^2-(a-d)^2}}{2b}, \quad cn\mu = \frac{a-d}{2b}, \quad dn\mu = \frac{a-d}{a+d}.$$

Als Hauptparameter ergeben sich dann für $\nu = +2K$:

(7a)

$-\frac{2K}{3}$	$-\frac{K}{3}$	0	$\frac{K}{3}$	$\frac{2K}{3}$	K
$-\frac{2K}{3}+\frac{2iK'}{3}$	$-\frac{K}{3}+\frac{2iK'}{3}$	$\frac{2iK'}{3}$	$\frac{K}{3}+\frac{2iK'}{3}$	$\frac{2K}{3}+\frac{2iK'}{3}$	$K+\frac{2iK'}{3}$
$-\frac{2K}{3}+\frac{4iK'}{3}$	$-\frac{K}{3}+\frac{4iK'}{3}$	$\frac{4iK'}{3}$	$\frac{K}{3}+\frac{4iK'}{3}$	$\frac{2K}{3}+\frac{4iK'}{3}$	$K+\frac{4iK'}{3}$

— die übrigen durch Vermehrung um $2iK'$ — und für $\nu = -2K$:

(7b)

$\frac{2K}{3}$	K	$\frac{4K}{3}$	$\frac{2K}{3}+K$	$2K$	$\frac{4K}{3}+K$
$\frac{2K}{3}+\frac{2iK'}{3}$	$K+\frac{2iK'}{3}$	$\frac{4K}{3}+\frac{2iK'}{3}$	$\frac{2K}{3}+\frac{2iK'}{3}+K$	$2K+\frac{2iK'}{3}$	$\frac{4K}{3}+\frac{2iK'}{3}+K$
$\frac{2K}{3}+\frac{4iK'}{3}$	$K+\frac{4iK'}{3}$	$\frac{4K}{3}+\frac{4iK'}{3}$	$\frac{2K}{3}+\frac{4iK'}{3}+K$	$2K+\frac{4iK'}{3}$	$\frac{4K}{3}+\frac{4iK'}{3}+K$

Wie man hieraus ersieht, kann man sich auf die eine dieser Tabellen beschränken, da die beiden Wertesysteme im wesentlichen durch Vermehrung um die Elementarperiode $2K$ ineinander übergeführt werden, zum Teil sogar übereinstimmen. Vor allem werden sich aber nun die für den allgemeinen Fall angedeuteten Rechnungen für die einfachsten dieser Parameter 0 und K leicht durchführen lassen. Unter den übrigen Parametern befinden sich, wie nach unserer Annahme zu erwarten war, die Argumente der Wurzeln der speziellen Dreiteilungsgleichung, sodaß sich das oben erwähnte Eliminationsproblem für diese Hauptparameter in der Weise vereinfacht, daß jetzt zwischen der in $x = sn\Theta$ dargestellten Bedingung für fünfpunktige Berührung und der speziellen Dreiteilungsgleichung

$$\varkappa^4 x^8 - 6\varkappa^2 x^4 + 4(1+\varkappa^2)x^2 - 3 = 0$$

x zu eliminieren oder die entsprechende Resultante aufzustellen wäre.

Um nun die Bedingung für fünfpunktige Berührung wirklich in $sn\,\Theta$ angeben zu können, müssen wir diejenige Darlstellung der elliptischen Funktionen benutzen, bei der nur noch ein einziger elliptischer Parameter vorkommt [siehe Gl. (17) bis (19) auf pag. 29], und zwar wird jetzt für $b = c$ infolge der Beziehungen (6) pag. 88:

$$
\begin{aligned}
&R_1 = -\,cn\,\mu, && R_2 = -\,sn\,\mu,\\
&R_3 = -\,cn\,\mu, && R_4 = \;\; sn\,\mu,\\
&R_5 = cn^2\Theta - dn\,\mu\, sn^2\Theta, && R_6 = [dn\,\mu + 1]\,sn\,\Theta\, cn\,\Theta,\\
&R_7 = cn^2\Theta + dn\,\mu\, sn^2\Theta, && R_8 = [dn\,\mu - 1]\,sn\,\Theta\, cn\,\Theta,\\
&N_1 = 1 - \varkappa^2 sn^2\mu\, sn^2\Theta, && N_2 = 1,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

also im besonderen

$$
R_1 = R_3, \quad R_2 = -R_4, \quad \frac{R_6}{R_8} = -\frac{a}{d}, \quad \frac{R_5 - 1}{R_7 - 1} = \frac{a}{d}.
$$

Die Darstellung (17) auf pag. 29 geht daher über in:

$$
\begin{aligned}
S_{14} &= \frac{2\,dn\,\mu\, sn\,\Theta\, cn\,\Theta}{N_1}, & C_{14} &= \frac{dn^2\mu\, sn^2\Theta - cn^2\Theta}{N_1},\\
S_{23} &= \frac{-2\,sn\,\mu\, cn\,\mu\, dn\,\Theta}{N_1}, & C_{23} &= \frac{cn^2\mu - sn^2\mu\, dn^2\,\Theta}{N_1},\\
S_{24} &= \frac{R_1 R_6 + R_2 R_5\, dn\,\Theta}{N_1}, & C_{24} &= \frac{-R_1 R_5 + R_2 R_6\, dn\,\Theta}{N_1},\\
S_{31} &= \frac{R_1 R_8 + R_2 R_7\, dn\,\Theta}{N_1}, & C_{31} &= \frac{R_1 R_7 - R_2 R_8\, dn\,\Theta}{N_1},\\
S_{34} &= \frac{R_1 R_6 - R_2 R_5\, dn\,\Theta}{N_1}, & C_{34} &= \frac{-R_1 R_5 - R_2 R_6\, dn\,\Theta}{N_1},\\
S_{12} &= \frac{-R_1 R_8 + R_2 R_7\, dn\,\Theta}{N_1}, & C_{12} &= \frac{R_1 R_7 + R_2 R_8\, dn\,\Theta}{N_1}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Beachtet man schließlich die weiteren leicht herzuleitenden Relationen:

$$
\begin{aligned}
&a R_7 - d R_5 = a - d, && a R_8 + d R_6 = 0,\\
&a R_7 + d R_5 = (a+d) N_1, && R_8 - R_6 = -2\,sn\,\Theta\, cn\,\Theta,\\
&R_5 R_7 = cn^2\Theta - N_1\, sn^2\Theta, && R_6 R_8 = -\varkappa^2 sn^2\mu\, sn^2\Theta\, cn^2\Theta,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

so erhält man nach einigen Rechnungen und Umformungen die Bedingungsgleichung für fünfpunktige Berührung in der Form:

$$
\begin{aligned}
&sn^2\mu\,[1 - \varkappa^2 sn^2\Theta]\, f_3 \big[-2\,a f_1 f_3 \quad d f_2 f_4\\
&+ 2(a+d)\varkappa^2 sn^2\Theta(1 - sn^2\Theta)\Big(1 - \frac{4\,a\,d}{(a+d)^2}\, sn^2\Theta\Big) f_5\big] + d f_2 f_6 = 0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

wenn die f_i die folgenden Funktionen von $sn^2\Theta$ bedeuten:

$$f_1 = 1 - \frac{2d}{a+d} sn^2\Theta - \varkappa^2 \frac{3a-d}{a+d} sn^4\Theta + \varkappa^2 \frac{2a}{a+d} sn^6\Theta,$$

$$f_2 = 1 - \frac{2a}{a+d} sn^2\Theta - \varkappa^2 \frac{3d-a}{a+d} sn^4\Theta + \varkappa^2 \frac{2d}{a+d} sn^6\Theta,$$

(12) $$f_3 = 1 - \varkappa^2 \frac{a+d}{a} sn^2\Theta + \varkappa^2 \frac{d}{a} sn^4\Theta,$$

$$f_4 = 1 - \varkappa^2 \frac{a+d}{d} sn^2\Theta + \varkappa^2 \frac{a}{d} sn^4\Theta,$$

$$f_5 = 1 - 2sn^2\Theta + \varkappa^2 sn^4\Theta.$$

$$f_6 = f_5^2 cn^2\mu - 4sn^3\mu sn^2\Theta[1-sn^2\Theta][1-\varkappa^2 sn^2\Theta]^3.$$

Es ergibt sich also im Falle $b = c$ zur Bestimmung derjenigen Parameter, für die der Ballsche Punkt eine fünfpunktige Geradführung bewirkt, eine Gleichung 8. Grades in $sn^2\Theta$.

Um nun zu der Bedingung für sechspunktige Berührung oder Geradführung zu gelangen, haben wir in diese Gleichung die einzelnen Hauptparameter einzusetzen, was wir, wie schon oben angekündigt, wenigstens für die einfachsten dieser Parameter, nämlich für O und K, tun wollen.

Für $\Theta = 0$ ist auch $sn^2\Theta = 0$, infolgedessen reduziert sich die Gleichung (11) auf

$$sn^2\mu[-2a-d] + d\,cn^2\mu = 0$$

oder, da jetzt

$$sn^2\mu = \frac{4b^2-(a-d)^2}{4b^2}, \qquad cn^2\mu = \frac{(a-d)^2}{4b^2}$$

ist, auf

(13) $$b^2 = \frac{(a+d)(a-d)^2}{2(2a+d)}.$$

Ferner wird, wie man sich leicht überzeugt, auf Grund der Darstellung (9):

$$\sin\alpha = 0, \qquad \cos\alpha = 1,$$
$$\sin\beta = -sn\mu, \qquad \cos\beta = cn\mu,$$
$$\sin\gamma = sn\mu, \qquad \cos\gamma = cn\mu,$$
$$\sin\delta = 0, \qquad \cos\delta = 1$$

und

$$
\begin{aligned}
&\sin\hat{\mathbf{A}} = 0, && \cos\hat{\mathbf{A}} = 1,\\
&\sin\hat{\mathbf{B}} = -\frac{\sqrt{q_1 q_4}}{2b}, && \cos\hat{\mathbf{B}} = -\frac{a-d}{2b},\\
&\sin\hat{A} = \frac{\sqrt{q_1 q_4}}{2b}, && \cos\hat{A} = \frac{a-d}{2b},\\
&\sin\hat{B} = \frac{a-d}{2b^2}\sqrt{q_1 q_4}, && \cos\hat{B} = \frac{2b^2-(a-d)^2}{2b^2},\\
&\sin\hat{P} = -\frac{\sqrt{q_1 q_4}}{2b}, && \cos\hat{P} = \frac{a-d}{2b},\\
&\sin\hat{H} = \frac{\sqrt{q_1 q_4}}{2b}, && \cos\hat{H} = -\frac{a-d}{2b}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Die Koppellage $\Theta = 0$ ist hiernach hauptsächlich dadurch charakterisiert, daß der Winkel zwischen dem Arm a und dem Steg d gleich 0^0, daß dagegen $\angle\alpha = 180^0$ und $\angle\delta = 0^0$, aber nach Gleichung (11) pag. 18

$$
\frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = -\frac{a}{d}, \qquad \frac{\tan\alpha}{\tan\delta} = \frac{a}{d} \tag{15}
$$

ist. Aus (14) folgt nun, daß diese Koppellage nur dann reell ist, wenn die Seiten des Gelenkvierecks der Ungleichung

$$q_1 q_4 > 0$$

oder

$$2b > |a-d| \tag{16}$$

genügen. Es ist infolgedessen zu untersuchen, ob die beiden Bedingungen (13) und (16), denen jetzt die Seiten unterworfen sind, jederzeit zusammen bestehen können. Die Gleichung (13) kann geschrieben werden

$$2b = |a-d|\sqrt{\frac{2(a+d)}{2a+d}};$$

folglich müßte nach (16) die Ungleichung bestehen:

$$a-d\sqrt{\frac{2(a+d)}{2a+d}} > |a-d|$$

oder

$$\frac{2(a+d)}{2a+d} > 1.$$

Diese Ungleichung ist stets erfüllt, wie man auch a und d wählen mag. Man erhält also unter allen Umständen, sowohl für $a < d$ als auch für $a > d$, aus der Gleichung (13) ein positives, reelles b, das der Bedingung (16) Genüge leistet, und

zwar kann b aus (13) entweder konstruktiv oder rechnerisch ermittelt werden — konstruktiv etwa dadurch, daß man zunächst die Strecken $\frac{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2}{2a+d}$ und $2(a+d)$ bestimmt und dann b als mittlere Proportionale zwischen diesen konstruiert.

Zur Orientierung sind einige zusammengehörige Werte von a, b, d für $a<d$ und $a>d$ berechnet worden und in den folgenden Tabellen zusammengestellt:

(17)

$a<d$

a	d	b
1	2	$\sqrt[3]{\frac{3}{2\cdot 4}} \sim 0{,}61$
1	3	$2\sqrt[4]{\frac{4}{2\cdot 5}} \sim 1{,}26$
1	4	$3\sqrt[5]{\frac{5}{2\cdot 6}} \sim 1{,}94$
1	5	$4\sqrt[6]{\frac{6}{2\cdot 7}} \sim 2{,}62$
1	6	$5\sqrt[7]{\frac{7}{2\cdot 8}} \sim 3{,}31$
1	7	$6\sqrt[8]{\frac{8}{2\cdot 9}} = 4$
1	8	$7\sqrt[9]{\frac{9}{2\cdot 10}} \sim 4{,}70$
:	:	: :
1	n	$(n-1)\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2(n+2)}}$

$a>d$

a	d	b
2	1	$\sqrt[3]{\frac{3}{2\cdot 5}} \sim 0{,}55$
3	1	$2\sqrt[4]{\frac{4}{2\cdot 7}} \sim 1{,}06$
4	1	$3\sqrt[5]{\frac{5}{2\cdot 9}} \sim 1{,}58$
5	1	$4\sqrt[6]{\frac{6}{2\cdot 11}} \sim 2{,}09$
6	1	$5\sqrt[7]{\frac{7}{2\cdot 13}} \sim 2{,}59$
7	1	$6\sqrt[8]{\frac{8}{2\cdot 15}} \sim 3{,}10$
8	1	$7\sqrt[9]{\frac{9}{2\cdot 17}} \sim 3{,}60$
:	:	: :
n	1	$(n-1)\sqrt[n+1]{\frac{n+1}{2(2n+1)}}$

Die bisher gefundenen Resultate können nun zunächst zu dem folgenden **Lehrsatze** zusammengefaßt werden:

Ist in einem Gelenkviereck die Koppel (b) gleich einem Arme (c) und genügt die Koppel bei willkürlich gegebenem Arm (a) und Steg (d) der Gleichung

$$b^2 = \frac{(a+d)(a-d)^2}{2(2a+d)},$$

so sind die zu den Parametern 0 und $2iK'$ gehörigen Koppellagen Hauptlagen des Gelenkvierecks, und

zwar sind diese Lagen dadurch charakterisiert, daß der ungleiche Arm (a) mit dem Steg einen Winkel von 0^0 bildet [siehe Tafel I und II].

Für den Hauptparameter $\Theta = K$ ist $sn^2\Theta = 1$, und es wird daher

$$f_1 = 1 - \frac{2d}{a+d} - \varkappa^2 \frac{3a-d}{a+d} + \varkappa^2 \frac{2a}{a+d} = \varkappa'^2 \frac{a-d}{a+d},$$

$$f_2 = 1 - \frac{2a}{a+d} - \varkappa^2 \frac{3d-a}{a+d} + \varkappa^2 \frac{2d}{a+d} = -\varkappa'^2 \frac{a-d}{a+d},$$

$$f_3 = 1 - \varkappa^2 \frac{a+d}{a} + \varkappa^2 \frac{d}{a} = \varkappa'^2,$$

$$f_4 = 1 - \varkappa^2 \frac{a+d}{d} + \varkappa^2 \frac{a}{d} = \varkappa'^2,$$

$$f_5 = 1 - 2 + \varkappa^2 = -\varkappa'^2,$$

$$f_6 = \varkappa'^4 cn^2\mu.$$

Die Gleichung (11) geht unter solchen Umständen über in

$$\varkappa'^2 sn^2\mu[2a-d] + d\,cn^2\mu = 0$$

oder

$$b^2 = \frac{(a-d)(a+d)^2}{2(2a-d)}. \tag{18}$$

Zur Fixierung der Koppellage $\Theta = K$ dienen die folgenden Angaben:

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha = 0, && \cos\alpha = -1,\\
&\sin\beta = -\varkappa' \frac{sn\mu}{cn\mu}, && \cos\beta = \frac{cn\mu}{dn\mu},\\
&\sin\gamma = \varkappa' \frac{sn\mu}{cn\mu}, && \cos\gamma = \frac{cn\mu}{dn\mu},\\
&\sin\delta = 0, && \cos\delta = -1
\end{aligned} \tag{19}$$

und

$$\begin{aligned}
&\sin\hat{\mathbf{A}} = 0, && \cos\hat{\mathbf{A}} = -1,\\
&\sin\hat{\mathbf{B}} = \frac{\sqrt{p_0(-p_{14})}}{2b}, && \cos\hat{\mathbf{B}} = \frac{a+d}{2b},\\
&\sin\hat{A} = \frac{\sqrt{p_0(-p_{14})}}{2b}, && \cos\hat{A} = \frac{a+d}{2b},\\
&\sin\hat{B} = \frac{a+d}{2b^2}\sqrt{p_0(-p_{14})}, && \cos\hat{B} = \frac{2b^2-(a+d)^2}{2b^2},\\
&\sin\hat{P} = -\frac{\sqrt{p_0(-p_{14})}}{2b}, && \cos\hat{P} = \frac{a+d}{2b},\\
&\sin\hat{H} = -\frac{\sqrt{p_0(-p_{14})}}{2b}, && \cos\hat{H} = \frac{a+d}{2b}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Diesmal ist also der Winkel zwischen dem Steg (d) und dem ungleichen Arm (a) gleich 180^0, und für die Winkel α und δ gelten die Beziehungen

$$(21) \qquad \sin\alpha = 0, \quad \sin\delta = 0; \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = -\frac{a}{d}, \quad \frac{\tan\alpha}{\tan\delta} = -\frac{a}{d}.$$

Infolge der Gleichungen (20) kann ein Gelenkviereck diese Koppellage nur dann einnehmen, wenn

$$p_0(-p_{14}) > 0,$$

also

$$(22) \qquad 2b > a + d$$

ist. Wir haben daher wieder zu untersuchen, ob die beiden Bedingungen (18) und (22) jederzeit zusammen bestehen können. Aus (18) folgt:

$$2b = (a+d)\sqrt{\frac{2(a-d)}{2a-d}}.$$

Hiernach ist b nur dann reell, wenn

$$\text{(I)} \quad a > d \quad \text{oder} \quad \text{(II)} \quad a < \frac{d}{2}$$

ist. Im ersten Falle müßte nach (22) die Ungleichung

$$(a+d)\sqrt{\frac{2(a-d)}{2a-d}} > a + d$$

oder

$$\frac{2(a-d)}{2a-d} > 1$$

erfüllt sein. Dies ist aber unter der Voraussetzung $a > d$ nicht möglich, da dann der Zähler dieses Bruches stets kleiner als der Nenner ist. Im zweiten Falle kann die entsprechende Ungleichung geschrieben werden:

$$\frac{2(d-a)}{d-2a} > 1,$$

und man überzeugt sich, daß ihr unter der Voraussetzung $a < \frac{d}{2}$ stets Genüge geleistet werden kann.

Für den Grenzfall $a = \frac{d}{2}$ wird $b = \infty$; das Gelenkviereck artet dann in ein Schleifkurbelgetriebe[1] aus, und der Ballsche Punkt K liegt auf der Stange AB, und zwar so, daß

$$BK = -2(a+d)$$

wird (siehe Tafel III, Fig. 1).

[1] Vergl. Burmester, Kinematik I, pag. 658, Tafel XLII, Fig. 663.

In allen übrigen Fällen kann zu gegebenen a und d, allerdings unter der Voraussetzung, daß $a < \frac{d}{2}$ ist, das zugehörige b auf Grund der Gleichung (18) konstruktiv oder rechnerisch ermittelt werden, und wir erhalten daher den **Lehrsatz:**

Ist in einem Gelenkviereck die Koppel (b) gleich einem Arme (c), so sind die zu den Parametern K und $K+2iK'$ gehörenden Koppellagen Hauptlagen des Gelenkvierecks, wenn zwischen dem ungleichen Arme (a), der Koppel (b) und dem Steg (d) die Beziehungen

$$b^2 = \frac{(a-d)(a+d)^2}{2(2a-d)}$$

und

$$a < \frac{d}{2}$$

bestehen, und zwar sind die Hauptlagen derart beschaffen, daß der ungleiche Arm (a) mit dem Steg (d) einen gestreckten Winkel bildet (siehe Tafel III u. IV).

Einige zusammengehörige auf Grund der Gleichung (18) berechnete Werte von a, b, d sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

(23)

a	d	b
1	2	∞
1	2,25	$\sim 5{,}14$
1	2,5	$\sim 4{,}31$
1	3	$= 4$
1	4	$\sim 4{,}33$
1	5	$\sim 4{,}99$
1	6	$\sim 5{,}54$
1	7	$\sim 6{,}20$
1	8	$\sim 6{,}88$
:	:	:
1	n	$(n+1)\sqrt{\frac{n-1}{2(n-2)}}$

Um nun wirklich zu den oben gefundenen Hauptlagen die gestreckten Koppelkurven zeichnen zu können, ist es notwendig, die Lage des Ballschen Punktes zu bestimmen. Zunächst überzeugt man sich, daß im Falle $\Theta = 0$ (und $2iK'$) der Pol P mit dem Punkt **B** und der Punkt H mit A zusammenfällt, sodaß $PH = h = |a - d|$ wird. Ferner ist ersichtlich, daß die Polbahntangente (t) in $\mathbf{B}B$ liegt und infolgedessen die Polbahnnormale (n) das auf $\mathbf{B}B$ in $\mathbf{B}(P)$ errichtete Lot ist. Zur Konstruktion des Wendepoles und Wendekreises müssen wir auf einen früher abgeleiteten Wert des Wendekreisdurch-

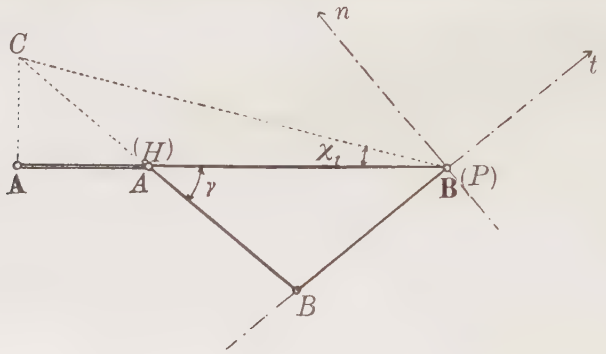

Fig. 13.

messers q [Gl. (11) pag. 64] zurückgreifen, da jetzt die auf pag. 65 und 66 angegebenen allgemeinen Konstruktionen versagen, und zwar ergibt sich mit Rücksicht auf die Beziehungen (15) pag. 91

(24) $$q = \left| \frac{d(a-d)}{a \sin \gamma} \right|,$$

wobei γ der Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks $AB\mathbf{B}$ ist. Wendepol und Wendekreis lassen sich hiernach einfach konstruieren.

Auch der Ballsche Punkt kann jetzt nicht nach den früher angegebenen allgemeinen Konstruktionen ermittelt werden. Zu seiner Bestimmung dient jetzt die Beziehung

(25) $$\tan \chi_t = \frac{a}{d} \tan \gamma.$$

Man findet also den Winkel χ_t, indem man in **A** auf **AB** das Lot errichtet, das die Koppel AB oder deren Verlängerung in C schneiden möge; dann ist $\angle \mathbf{ABC} = \angle \chi_t$. Dieser Winkel ist an die positive Pohlbahntangente in P anzutragen, was einfach dadurch geschehen kann, daß man von **A** Lote auf $\mathbf{B}C$ und $\mathbf{B}B$ fällt und zur Verbindungslinie ihrer Fußpunkte durch den Pol $P(\mathbf{B})$ die Senkrechte zieht.

Um nun die Lage des Ballschen Punktes K noch genauer zu fixieren, wollen wir seine Entfernung vom Pol be-

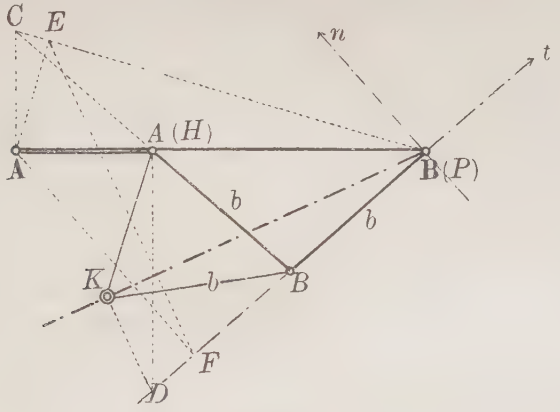

Fig. 14.

rechnen, d. h. die Strecke $\mathbf{B}K = q \sin \chi_t$, und zwar ergibt sich nach (24) und (25)

$$\overline{\mathbf{B}K} = \left| \frac{(a-d)\cos\chi t}{\cos\gamma} \right| .$$

Der Ballsche Punkt würde sich hiernach folgendermaßen konstruieren lassen:

Man errichte in **A** und A Lote auf **AB**, die AB und $\mathbf{B}B$ in C resp. D treffen. Dann fälle man von **A** auf $\mathbf{B}C$ und $\mathbf{B}B$ die Lote $\mathbf{A}E$ und $\mathbf{A}F$ und ziehe zu EF durch **B** die Senkrechte und durch D die Parallele, die sich im Ballschen Punkt K schneiden. Aus dem so entstandenen rechtwinkligen Dreieck $\mathbf{B}DK$ folgt aber dann mit Rücksicht auf $BD = \mathbf{B}B = b$, daß auch $BK = b$ ist, sodaß wir schließlich zu dem Resultat gelangen, daß das Koppeldreieck ABK ein gleichschenkliges

Dreieck ist. Diese Eigenschaft besitzt das Koppeldreieck auch für den Parameter $\Theta = K$ (und $K + 2iK'$), sodaß auch für diese Hauptlage die Konstruktion des Ballschen Punktes leicht auszuführen ist, und zwar ganz analog wie für $\Theta = 0$ (und $2iK'$).

Auf den Tafeln (I) bis (IV) sind auf Grund der Tabellen (17) und (23) unter Berücksichtigung der soeben gewonnenen Resultate in bezug auf den Ballschen Punkt einige Gelenkvierecke in den Hauptlagen $\Theta = 0$ und $\Theta = K$ mit den dazu gehörigen gestreckten Koppelkurven gezeichnet.

Hierbei ist besonders dasjenige Gelenkviereck von Interesse, für welches $a = 1$, $d = 3$, $b = 4$ ist, da sich hier b rational und ganzzahlig ergibt und der Ballsche Punkt auf die Koppel fällt; die drei beweglichen Glieder bilden dann gemäß dem auf pag. 82 angeführten Müllerschen Satze ein gleichseitiges Dreieck. Die durch dieses Gelenkviereck bewirkte Geradführung ist als eine der Tschebyscheffschen Geradführungen bekannt, und zwar wird sie gewöhnlich nach ihrer λ-förmigen Gestalt die λ-Geradführung von Tschebyscheff genannt[1].

Zugleich sei hier noch einmal an den schon früher erwähnten Umstand erinnert, daß die Koppellagen, die wir für $b = c$ als Hauptlagen gefunden haben, an sich als geradführend bekannt sind[2], nur daß dann der geradgeführte Punkt in der Regel eine vier- bis fünfpunktige oder sechspunktige angenäherte Geradführung bewirkt und infolgedessen die Seiten eines solchen Gelenkvierecks im allgemeinen nicht unseren Seitenrelationen genügen. Diese angenäherten Geradführungen liefern allerdings längere, scheinbare Anschlußstrecken an eine Gerade als die entsprechenden genauen Geradführungen oder

[1] Tschebyscheff, Memoiren der Ak. d. Wissensch. in St. Petersburg, Bd. XIV; vergl. u. a. auch: Burmester, Kinematik I, pag. 655, Tafel XLI, Fig. 658 und die verschiedenen Arbeiten von R. Müller über die sechspunktige Berührung; ferner Wassilief und Delaunay, P. L. Tschebyscheff und seine wissensch. Leistungen, Leipzig, 1900; Somoff, Über einige Anwendungen der Kinematik veränderlicher Systeme auf Gelenkmechanismen, Z. f. M. u. Ph., Bd. 46, pag. 203.

[2] Vergl. z. B. Burmester, Kinematik I, pag. 652ff.

Berührungen; der Wert der letzteren liegt dagegen darin, wie wir schon in der Einleitung ausgeführt haben, daß sie sich mathematisch leichter formulieren und fixieren lassen und dann als Ausgangspunkt für angenäherte Geradführungen dienen können, indem man nach den Müllerschen Untersuchungen[1] in bestimmter Weise Änderungen in den Seitenverhältnissen und der Lage des Ballschen Punktes vornimmt.

Es würde nun naheliegen, in derselben Weise die speziellen Fälle $a = b$ und $a = c$ zu behandeln.

Der Fall $a = b$ wird aber ohne weiteres auf den Fall $b = c$ zurückgeführt, da ja dann ebenfalls ein Arm gleich der Koppel ist; es werden sich also dieselben Seitenrelationen mit den entsprechenden Vertauschungen und dieselben Koppellagen als Hauptlagen ergeben, nur daß jetzt nicht der Winkel zwischen a und d gleich 0^0 oder 180^0 ist, sondern der Winkel zwischen c und d. Wir können daher auf die Durchführung der betreffenden Rechnungen verzichten, zumal sie sich auch umständlicher gestalten als für $b = c$, da jetzt die bei den Hauptparametern auftretende additive Konstante den Wert μ annimmt, also nicht mehr einen so einfachen Wert besitzt wie bei $b = c$.

Auch in dem Falle des gleicharmigen Gelenkvierecks, also für $a = c$, können wir davon absehen, die Rechnungen vollständig durchzuführen, da sich auch hier formal dieselben Bedingungsgleichungen für die Seiten ergeben wie in den Fällen $b = c$ und $a = b$, was ja zu vermuten war, da nach dem Robertsschen Satze diese drei Arten von Gelenkvierecken, in denen je zwei bewegliche Glieder einander gleich sind, ineinander übergeführt werden[2]. Die betreffenden Hauptlagen sind beim gleicharmigen Gelenkviereck derart beschaffen, daß die Koppel parallel zum Steg ist, also entweder einen Winkel

[1] R. Müller, Über die angenäherte Geradführung etc., Z. f. M. u. Ph., 43, pag. 36.

[2] Siehe Burmester, Kinematik I, pag. 623ff, das Kapital über „Konstruktion angenähert geradführender Mechanismen".

von 0^0 oder 180^0 mit dem Steg bildet. In der ersten Lage bilden die vier Glieder des Gelenkvierecks ein gleichschenkliches Trapez, in der zweiten überschneiden sich die beiden Arme; die hierzu gehörigen Hauptparameter sind μ_3 und $\mu_3 + K$, da jetzt die additive Konstante $\frac{\nu}{3}$ den Wert $-\mu_3 + \frac{2K}{3}$ besitzt.

In bezug auf Polbahntangente, — normale, Wendepol und Ballschen Punkt ist folgendes zu bemerken:

Die Polbahntangente ist parallel zum Steg, infolgedessen versagt hier die Grüblersche Konstruktion des Wendepoles; man bestimmt daher den Wendepol am besten nach der auf pag. 66 angeführten Konstruktion von Allievi. Da jetzt ferner, wie man sich leicht überzeugt, $\tan \chi_t = \infty$, also $\chi_t = 90^0$ ist, fällt gegenwärtig der Ballsche Punkt K mit dem Wendepol W zusammen, und die Tangente der sechspunktigen Berührung geht daher parallel zum Steg.

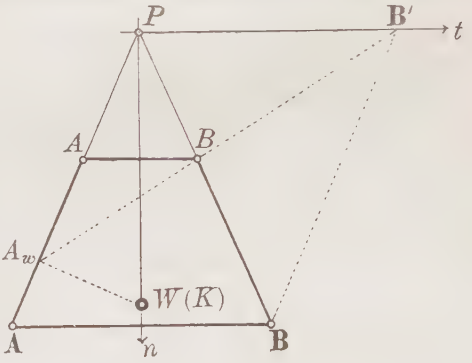

Fig. 15.

Die Tafeln (V) bis (VII) zeigen einige solche gleicharmige Gelenkvierecke mit ihren gestreckten Koppelkurven.

Die durch ein gleichschenkliges Trapez erzeugte sechspunktige genaue Geradführung ist von R. Müller[1] an verschiedenen Stellen behandelt worden: sie steht bekanntlich in engem Zusammenhang mit dem Robertsschen Dreieckslenker[2].

[1] R. Müller, Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, Z. f. M. u. Ph., 28, pag. 140; und R. Müller, Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente, Z. f. M. u. Ph., 46, pag. 339 u. 340.

[2] Willis, Principles of mecanism, London, 1841, pag. 411; siehe auch Burmester, Kinematik I, pag. 658; Allievi, Cinematica etc., pag. 139, Fig. 79; Reuleaux, Kinemat. Skizzenbuch; Hütte, Ingenieurtaschenbuch, I, pag. 845.

bei dem der geradgeführte Punkt aber im allgemeinen nur eine vierpunktige angenäherte Geradführung ausführt.

Besonderes Interesse bietet ferner dasjenige gleicharmige Gelenkviereck mit gekreuzten Armen, für welches

$$a : d : b = 4 : 3 : 1$$

ist, da der Ballsche Punkt wieder auf der Koppel liegt, und zwar in deren Mittelpunkte, und die drei beweglichen Glieder dementsprechend ein gleichseitiges Dreieck bilden. Es ist dies der bekannte Tschebyscheffsche Kreuzlenker[1], der ebenfalls von R. Müller[2] des öfteren bei seinen Untersuchungen über die sechspunktige Geradführung erwähnt wird.

Fassen wir nunmehr unsere Resultate in bezug auf die speziellen Fälle $b = c$, $a = b$, $a = c$ zusammen, so können wir den folgenden allgemeinen **Lehrsatz** aussprechen:

Sind in einem Gelenkviereck je zwei der beweglichen Glieder einander gleich und bezeichnet man das Verhältnis der gleichen Glieder zum Steg mit λ, das Verhältnis des ungleichen Gliedes zum Steg mit μ, so sind diejenigen Koppellagen, in denen das ungleiche Glied mit dem Steg einen Winkel von 0^0 bildet, Hauptlagen des Gelenkvierecks, wenn zwischen λ und μ bei beliebig gewähltem μ die Gleichung besteht:

$$\lambda^2 = \frac{[1+\mu][1-\mu]^2}{2[1+2\mu]}; \tag{26}$$

ist dagegen der Winkel zwischen dem ungleichen Glied und dem Steg gleich 180^0, so sind die entsprechenden Koppellagen nur dann Hauptlagen des Gelenkvierecks, wenn $\mu < \frac{1}{2}$ und

$$\lambda^2 = \frac{[1-\mu][1+\mu]^2}{2[1-2\mu]} \tag{27}$$

[1] Tschebyscheff, Verhandlungen d. Vereins zur Beförderung d. Gewerbefleißes in Preußen, 1870, pag. 168; siehe u. a. auch Reuleaux, Kinemat. Skizzenbuch; Burmester, I, pag. 655, Tafel XLI, Fig. 657.

[2] Siehe S. 100 unter [1], außerdem z. B. in „Beiträge etc.“, Festschrift, pag. 74.

ist. In beiden Fällen ist das vom Ballschen Punkt und der Koppel gebildete Koppeldreieck gleichschenklig.

Im Anschluß hieran wollen wir schließlich noch den Fall untersuchen, daß alle drei beweglichen Glieder einander gleich sind. Für $a=b=c$ wird $\lambda=\mu$, und es ergeben sich daher aus (26) und (27) für λ die Bestimmungsgleichungen

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\text{(I)}\quad 3\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-1=0,\\ &\text{(II)}\quad 3\lambda^3-3\lambda^2+\lambda+1=0, \end{aligned}$$

deren reelle Wurzeln

$$(29)\qquad \text{(I)}\ \lambda=\frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{10}-1\right],\quad \text{(II)}\ \lambda=-\frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{10}-1\right]$$

sind. Da λ als Verhältnis zweier Seiten des Gelenkvierecks unter allen Umständen als positiv vorauszusetzen ist, kommt nur der aus der ersten der Gleichungen (28) folgende Wert in Betracht. Ein Gelenkviereck mit gleichen beweglichen Gliedern besitzt also sechs Hauptlagen, und zwar jedesmal dann, wenn ein bewegliches Glied mit dem Steg einen Winkel von 0^0 bildet.

Auf Tafel (VIII) sind drei dieser Hauptlagen mit den zugehörigen gestreckten Koppelkurven gezeichnet; die drei übrigen sind die hierzu symmetrischen Lagen. Wir gewinnen daher den **Lehrsatz:**

Sind in einem Gelenkviereck die drei beweglichen Glieder einander gleich und ist das Verhältnis der Koppel zum Steg gleich $\frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{10}-1\right]$, so sind die sechs Koppellagen, in denen entweder die Koppel parallel zum Steg ist oder ein Arm mit dem Steg zusammenfällt, Hauptlagen des Gelenkvierecks.

§ 12. Angabe einiger weiterer spezieller Fälle und Durchführung eines derselben.

Im allgemeinen Falle gestalteten sich die Hauptparameter dadurch unbequem, daß in ihnen die additive Konstante $-\frac{\nu}{3}$

auftritt; man würde also, wie schon früher erwähnt, den allgemeinen Fall nur mit Hilfe der Wurzeln der allgemeinen Dreiteilungsgleichung der elliptischen Funktionen lösen können. In den bisher behandelten speziellen Fällen nahm nun diese additive Konstante einen einfachen Wert an, und infolgedessen ergaben sich auch jedesmal einige der Hauptparameter in einfacher Gestalt, für die dann ohne größere Schwierigkeiten das Problem der sechspunktigen Berührung gelöst werden konnte.

Es liegt daher nahe, weitere spezielle Fälle herzuleiten durch besondere, natürlich möglichst günstige Wahl von $\frac{\nu}{3}$ oder ν, was einer bestimmten Bedingungsgleichung zwischen den elliptischen Konstanten μ_1, μ_2, μ_3 oder den Seiten a, b, c, d des Gelenkvierecks gleichkommt.

Man könnte diese Spezialisierungen ganz systematisch vornehmen, indem man z. B. der Reihe nach $\frac{\nu}{3}$ gleich den (positiven oder negativen) Konstanten μ_1, μ_2, μ_3 setzt, ferner gleich $2\mu_1$, $2\mu_2$, $2\mu_3$ usw., oder auch gleich den Differenzen je zweier dieser Konstanten, also gleich $\mu_1 - \mu_2$, $\mu_2 - \mu_3$, $\mu_3 - \mu_1$, da ja die elliptischen Funktionen dieser Größen bekannt sind.

Würde man z. B. $\frac{\nu}{3} = +\mu_1$ setzen, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Relation

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$$

der Konstantenbeziehung

$$2\mu_1 = 2\mu_2$$

oder infolge von

$$sn\, 2\mu_1 = \frac{\sqrt{q_1 q_2 q_3 q_4}}{2(bc+ad)}, \qquad sn\, 2\mu_2 = \frac{\sqrt{q_1 q_2 q_3 q_4}}{2(ac+bd)}$$

als Bedingung zwischen den Seiten

$$bc + ad = ac + bd,$$

also

$$(a-b)(c-d) = 0.$$

Man erhält also auf diese Weise zunächst den schon erledigten Fall $a = b$, außerdem aber einen neuen Fall, nämlich $c = d$, der allerdings für uns hier um deswillen weniger von

Interesse ist, als ein solches Gelenkviereck für die entsprechenden Hauptparameter in einen gleichschenkligen Schubkurbelmechanismus ausartet, wie man sich durch Ausführung der betreffenden Rechnungen leicht überzeugt.

Andererseits kann man auch durch die folgende Überlegung zu brauchbaren speziellen Fällen gelangen. Im Falle $b = c$ hatten wir für ν den einfachen Wert $2K$ gefunden, und zwar mußte $2K$ — und nicht etwa 0 — gewählt werden, da

$$(1) \quad sn\nu = \frac{b-c}{a-d}\, sn\mu, \quad cn\nu = -\frac{b+c}{a-d}\, cn\mu, \quad dn\nu = \frac{a+d}{a-d}\, dn\mu$$

ist, also $sn\nu$ und $dn\nu$ positiv, dagegen $cn\nu$ negativ. Es liegt nun nahe, ν gleich anderen einfachen Teilwerten von Perioden zu setzen, für die sn und dn positiv, dagegen cn negativ ist, z. B. $\frac{3K}{2}$; denn es ist

$$(2) \quad sn\frac{3K}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+\varkappa'}}, \quad cn\frac{3K}{2} = -\sqrt{\frac{\varkappa'}{1+\varkappa'}}, \quad dn\frac{3K}{2} = \sqrt{\varkappa'}.$$

Wir wollen für diesen Fall die entsprechenden Rechnungen durchführen. Da also jetzt $\nu = \frac{3K}{2}$ ist, folgt aus (1) und (2)

$$(3) \quad \frac{a+d}{a-d}\, dn\mu = \sqrt{\varkappa'}$$

oder mit Rücksicht auf die Werte von $dn\mu$ und $\varkappa'$:

$$(a+d)^4 q_1 q_4 p_{12} p_{13} = (a-d)^4 q_2 q_3 p_0 (-p_{14}),$$

also

$$(a+d)^4 [(b+c)^2 - (a-d)^2][(a-d)^2 - (b-c)^2]$$
$$= (a-d)^4 [(a+d)^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - (a+d)^2].$$

Nach einigen Umformungen gelangt man schließlich zu der Seitenrelation

$$(4) \quad \frac{(a^2-d^2)^2}{a^2+d^2} = -\frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2},$$

die also die Bedingung dafür darstellt, daß $\nu = \frac{3K}{2}$ ist. Dann ist aber

$$q_1 q_4 = \frac{2(b+c)^2(ab+cd)(ac+bd)}{(a+d)^2(b^2+c^2)}, \qquad q_2 q_3 = \frac{2(b-c)^2(ab+cd)(ac+bd)}{(a-d)^2(b^2+c^2)},$$

$$p_0(-p_{14}) = \frac{2(b+c)^2(ab-cd)(ac-bd)}{(a-d)^2(b^2+c^2)}, \qquad p_{12}p_{13} = -\frac{2(b-c)^2(ab-cd)(ac-bd)}{(a+d)^2(b^2+c^2)}.$$

und infolgedessen besitzt der Modul der elliptischen Funktionen den Wert

$$\varkappa^2 = \frac{4abcd(a^2+d^2)(b^2+c^2)}{(ab+cd)^2(ac+bd)^2}. \tag{5}$$

Ferner ist jetzt

$$\varkappa'^2 = \frac{(ab-cd)^2(ac-bd)^2}{(ab+cd)^2(ac+bd)^2} \tag{6}$$

und nach (1) und (2)

$$\begin{aligned} sn\,\nu &= \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{2bc(a^2+d^2)}}, \\ cn\,\nu &= -\sqrt{\frac{(ab-cd)(ac-bd)}{2bc(a^2+d^2)}}, \\ dn\,\nu &= \sqrt{\frac{(ab-cd)(ac-bd)}{(ab+cd)(ac+bd)}}; \end{aligned} \tag{7}$$

infolgedessen besteht zwischen $sn\nu$, $cn\nu$ und $dn\nu$ die Beziehung

$$sn\,\nu\,dn\,\nu = -cn\,\nu, \tag{8}$$

die sich ja auch ohne weiteres aus den Gleichungen (2) ergibt, da eben jetzt $\nu = \frac{3K}{2}$ ist.

Die auf pag. 85 angegebene Tabelle der Hauptparameter geht nun für $\frac{\nu}{3} = \frac{K}{2}$ über in die folgende:

(9)

$-\frac{K}{2}$	$-\frac{K}{6}$	$\frac{K}{6}$	$\frac{K}{2}$	$\frac{5K}{6}$	$\frac{7K}{6}$
$-\frac{K}{2}+\frac{2iK'}{3}$	$-\frac{K}{6}+\frac{2iK'}{3}$	$\frac{K}{6}+\frac{2iK'}{3}$	$\frac{K}{2}+\frac{2iK'}{3}$	$\frac{5K}{6}+\frac{2iK'}{3}$	$\frac{7K}{6}+\frac{2iK'}{3}$
$-\frac{K}{2}+\frac{4iK'}{3}$	$-\frac{K}{6}+\frac{4iK'}{3}$	$\frac{K}{6}+\frac{4iK'}{3}$	$\frac{K}{2}+\frac{4iK'}{3}$	$\frac{5K}{6}+\frac{4iK'}{3}$	$\frac{7K}{6}+\frac{4iK'}{3}$

Die übrigen Parameter ergeben sich durch Vermehrung um $2iK'$. Für die hierin enthaltenen einfacheren Hauptparameter $-\frac{K}{2}\left(-\frac{K}{2}+2iK'\right)$ und $\frac{K}{2}\left(\frac{K}{2}+2iK'\right)$ wollen wir die sechspunktige Berührung untersuchen und vor allem die entsprechenden Bedingungsgleichungen für die Seiten aufstellen.

Wir beginnen mit $\Theta = \frac{K}{2}\left(\frac{K}{2}+2iK'\right)$. Nun ist bekanntlich

$$sn\,\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+\varkappa'}}, \quad cn\,\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{\varkappa'}{1+\varkappa'}}, \quad dn\,\frac{K}{2} = \sqrt{\varkappa'},$$

also nach (2)

$$sn\frac{K}{2}=sn\frac{3K}{2},\qquad cn\frac{K}{2}=-cn\frac{3K}{2},\quad dn\frac{K}{2}=dn\frac{3K}{2}.$$

Man hat daher in der auf pag. 29 angegebenen Darstellung der elliptischen Funktionen

$$sn\Theta=sn\nu,\quad cn\Theta=-cn\nu,\quad dn\Theta=dn\nu$$

zu setzen. Dann ergibt sich aber unter Berücksichtigung von (1) und (8)

$$\begin{aligned}
R_1&=-\frac{2b(a-d)}{b^2-c^2}cn^2\nu, & R_2&=\frac{2c(a-d)}{b^2-c^2}sn\nu\,cn\nu,\\
R_3&=\frac{2c(a-d)}{b^2-c^2}cn^2\nu, & R_4&=-\frac{2b(a-d)}{b^2-c^2}sn\nu\,cn\nu,\\
R_5&=\frac{2d}{a+d}cn^2\nu, & R_6&=\frac{2a}{a+d}cn^2\nu,\\
R_7&=\frac{2a}{a+d}cn^2\nu, & R_8&=-\frac{2d}{a+d}cn^2\nu,\\
N_1&=\frac{2(a^2+d^2)}{(a+d)^2}cn^2\nu, & N_2&=2\,cn^2\nu
\end{aligned}$$

und infolgedessen nach einigen weiteren Umformungen:

$$\begin{aligned}
S_{14}&=\frac{a^2-d^2}{a^2+d^2}, & C_{14}&=-\frac{2ad}{a^2+d^2},\\
S_{23}&=-\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}, & C_{23}&=-\frac{2bc}{b^2+c^2},\\
S_{24}&=-\frac{(a^2-d^2)(ab+cd)}{(a^2+d^2)(b^2-c^2)}, & C_{24}&=-\frac{(a^2-d^2)(ac-bd)}{(a^2+d^2)(b^2-c^2)},\\
S_{31}&=-\frac{(a^2-d^2)(ab+cd)}{(a^2+d^2)(b^2-c^2)}, & C_{31}&=\frac{(a^2-d^2)(ac-bd)}{(a^2+d^2)(b^2-c^2)},\\
S_{34}&=\frac{(a^2-d^2)(ac+bd)}{(a^2+d^2)(b^2-c^2)}, & C_{34}&=\frac{(a^2-d^2)(ab-cd)}{(a^2+d^2)(b^2-c^2)},\\
S_{12}&=-\frac{(a^2-d^2)(ac+bd)}{(a^2+d^2)(b^2-c^2)}, & C_{12}&=-\frac{(a^2-d^2)(ab-cd)}{(a^2+d^2)(b^2-c^2)}.
\end{aligned}\tag{10}$$

Es ist also jetzt im besonderen

$$\begin{aligned}
S_{31}&=S_{24}, & C_{31}&=-C_{24},\\
S_{12}&=-S_{34}, & C_{12}&=-C_{34},
\end{aligned}\tag{11}$$

und die auf pag. 20 angegebenen Kotangenten der Winkel α, β, γ, δ nehmen daher zunächst die einfachere Form an:

$$(12)\quad \begin{aligned} \cot\alpha &= -\frac{b\,C_{24}+c\,C_{34}}{a\,S_{14}}, \quad \cot\beta = \frac{a\,C_{24}-d\,C_{34}}{b\,S_{23}}, \\ \cot\gamma &= -\frac{a\,C_{34}-d\,C_{24}}{c\,S_{23}}, \quad \cot\delta = -\frac{b\,C_{34}+c\,C_{24}}{d\,S_{14}} \end{aligned}$$

oder schließlich infolge der in (10) gefundenen Werte der $S_{m,n}$ und $C_{m,n}$:

$$(13)\quad \cot\alpha = -\frac{d}{a}, \quad \cot\beta = \frac{c}{b}, \quad \cot\gamma = \frac{b}{c}, \quad \cot\delta = -\frac{a}{d}.$$

Die für fünfpunktige Berührung geltende Winkelbeziehung

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma + 2\cot\delta + \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma = 0$$

geht daher über in

$$-\frac{d}{a} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} - 2\frac{a}{d} - \frac{d}{a} = 0$$

oder

$$(14)\quad \frac{ad}{a^2+d^2} = \frac{2bc}{b^2+c^2}.$$

Wir erhalten infolgedessen den **Lehrsatz:**

Genügen die Seiten eines Gelenkvierecks den beiden Gleichungen

$$(14^*)\quad \begin{aligned} (\mathrm{I})\quad & \frac{(a^2-d^2)^2}{a^2+d^2} = \frac{(b^2-c^2)^2}{b^2+c^2}, \\ (\mathrm{II})\quad & \frac{ad}{a^2+d^2} = \frac{2bc}{b^2+c^2}, \end{aligned}$$

so sind die zu den Parametern $\frac{K}{2}\left(\frac{K}{2}+2iK'\right)$ gehörenden Koppellagen Hauptlagen des Gelenkvierecks.

Löst man die Gleichungen (14*, I, II) unter der Voraussetzung, daß die Seiten a und d gegeben sind, nach b und c auf, so findet man

$$(15)\quad \begin{aligned} b^2 &= \frac{(a^2-d^2)^2\left[a^2+d^2 \pm \sqrt{R}\right]}{2R}, \\ c^2 &= \frac{(a^2-d^2)^2\left[a^2+d^2 \mp \sqrt{R}\right]}{2R}, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$R = a^4 + a^2d^2 + d^4 = (a^2 + ad + d^2)(a^2 - ad + d^2).$$

Die Koppellage $\frac{K}{2}$ ist dadurch charakterisiert, daß jetzt

(16) $$\tan \hat{\mathbf{A}} = \frac{a^2-d^2}{2ad}, \quad \tan \hat{A} = \frac{ac+bd}{ab-cd}, \quad \tan \hat{P} = \frac{ab+cd}{ac-bd},$$
$$\tan \hat{\mathbf{B}} = \frac{ac+bd}{ab-cd}, \quad \tan \hat{B} = \frac{b^2-c^2}{2bc}, \quad \tan \hat{H} = \frac{ab+cd}{ac-bd}$$

ist.

Hieraus folgt aber, daß die vier Punkte $A, \mathbf{B}, P, H$ auf einem Kreis liegen, da nach (10)

$$\sin \hat{\mathbf{B}} = -\sin \hat{A}, \qquad \sin \hat{P} = -\sin \hat{H},$$
$$\cos \hat{\mathbf{B}} = -\cos \hat{A}, \qquad \cos \hat{P} = -\cos \hat{H},$$

also

$$\angle \mathbf{B} = \angle A + 180^0, \qquad \angle P = \angle H + 180^0$$

ist. Ferner ergibt sich aus (13)

$$\tan \alpha = \cot \delta, \qquad \tan \beta = \cot \gamma,$$

also

$$\alpha + \delta = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta + \gamma = \frac{\pi}{2},$$

mithin

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi,$$

in Übereinstimmung mit der einen von R. Müller gefundenen Winkelbeziehung, die für sechspunktige Berührung zwischen den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestehen muß. [Siehe Gl. (5) pag. 82].

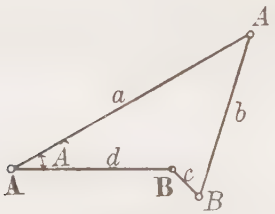

Fig. 16.

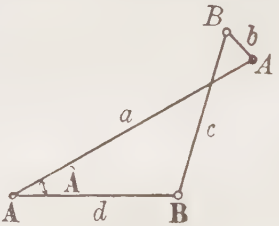

Fig. 17a.

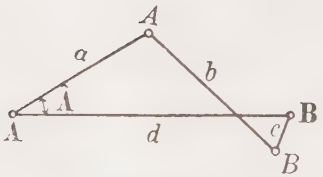

Fig. 17b.

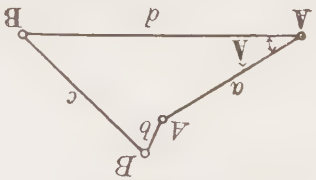

Fig. 17c.

Ist $a > d$ und $b > c$, so sind nach (10) die Winkel $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{B}$, $\hat{A}$ und $\hat{H}$ spitze, dagegen $\hat{\mathbf{B}}$ und $\hat{P}$ überstumpfe Winkel; das Gelenkviereck wird also die in vorstehender Figur (16) gezeichnete Lage annehmen. Die Bedingungsgleichungen (14*, I, II) ändern sich aber nicht, wenn man in ihnen a mit d oder b mit c vertauscht. Hat man also ein Gelenkviereck gefunden, das den obigen Bedingungen Genüge leistet, so existieren stets noch drei weitere Gelenkvierecke, die in den entsprechenden Hauptlagen eine sechspunktige Geradführung bewirken; ihre Hauptlagen sind durch die Figuren (17) erläutert.

Um nun ein solches Gelenkviereck wirklich konstruieren zu können, dessen Seiten den Gleichungen (14*, I, II) genügen, wollen wir annehmen, daß a und d gegeben seien; dann sind (I) und (II) zwei Bestimmungsgleichungen für b und c. Fassen wir daher diese Gleichungen als Gleichungen von Kurven auf, so können wir b und c graphisch ermitteln; die Koordinaten des Schnittpunktes zweier zu gegebenen a und d gehöriger Kurven sind die entsprechenden Größen b und c.

Setzt man $b = x$, $c = y$ und zur Abkürzung

$$\frac{a^2 - d^2}{\sqrt{a^2 + d^2}} = e,$$

so ergibt sich aus (14*, I) die Kurvengleichung

$$(x^2 - y^2)^2 = e^2 (x^2 + y^2) \quad [1] \tag{17}$$

oder in Polarkoordinaten für $x = \varrho \cos \varphi$ und $y = \varrho \sin \varphi$:

$$\varrho = \frac{e}{\cos 2\varphi}.^1 \tag{18}$$

Die hierdurch dargestellte Kurve ist eine gleichseitige gerade Kreuzkurve (nach Schoute[1]); sie besitzt die Geraden

$$y = \pm x \pm \frac{e}{2}\sqrt{2}$$

zu Asymptoten und besteht aus vier hyperbelähnlichen Zweigen. Da wir aber nur positive Werte von b und c gebrauchen können, kommen für uns nur die im ersten Quadranten verlaufenden

[1] Siehe Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, pag. 210, Tafel VII, Fig. 54.

Teile der Zweige in Betracht. Für $\varphi = 0$ ist $\varrho = e$, während zu einem beliebigen Winkel φ nach (18) das zugehörige ϱ gefunden wird, indem man den zu 2φ gehörigen Strahl mit der zur y-Achse im Abstande e gezogenen Parallelen schneidet und durch den Schnittpunkt B mit OB als Radius einen Kreis zieht, der den Strahl φ im gesuchten Kurvenpunkt C trifft. Am einfachsten gelangt man daher zu einer größeren Anzahl von Kurvenpunkten durch die folgende Konstruktion: Man schlage

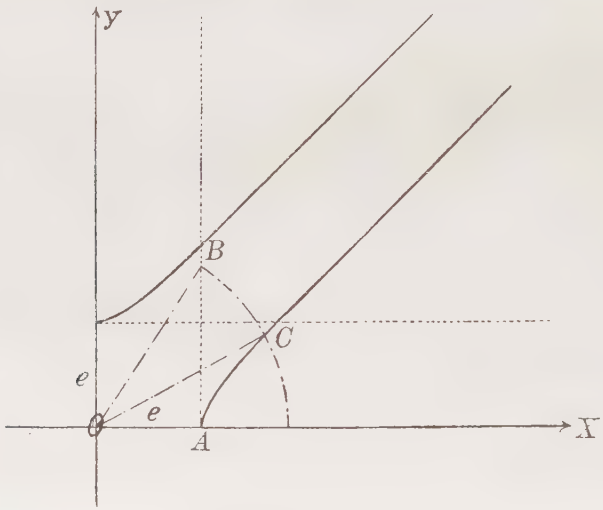

Fig. 18.

um O eine Schar konzentrischer Kreise und halbiere die Bögen zwischen der x- (resp. y-) Achse und der zur y- (resp. x-) Achse im Abstande e gezogenen Parallelen.

Aus

$$\varrho = \frac{a^2 - d^2}{\sqrt{a^2 + d^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{d^2}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

erkennt man nun, daß die Größe e, die für unsere Kurve den Charakter eines Parameters besitzt, gleich der Differenz der Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und d ist und dementsprechend bei gegebenen a und d leicht konstruiert werden kann.

Die zweite Bedingungsgleichung (14*, II) stellt eine Kurve zweiten Grades dar, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, zwei aufeinander senkrecht stehende Strahlen durch O. Der für uns in Betracht kommende Strahl im ersten Quadranten besitzt die Gleichung

$$\sin 2\varphi = \frac{ad}{a^2+d^2}$$

oder, wenn man den einen spitzen Winkel in dem aus a und d als Katheten gebildeten rechtwinkligen Dreieck mit ψ bezeichnet,

$$\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\psi.$$

Um also zu gegebenen a und d die zugehörigen b und c zu finden, hat man denjenigen Punkt der zu $e = \frac{a^2-d^2}{\sqrt{a^2+d^2}}$ gehörigen Kurve $\varrho = \frac{e}{\cos 2\varphi}$ zu bestimmen für den $\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\psi$ und $\tan\psi = \frac{d}{a}$ ist. Die entsprechende Konstruktion würde sich folgendermaßen gestalten:

Man zeichne aus $a = \overline{OA}$ und $d = \overline{AB}$ als Katheten das rechtwinklige Dreieck OAB, ziehe die Höhe AC und mache $\overline{CD}$ gleich $\overline{BC}$. Dann schlage man um O mit $\overline{OD}$ als Radius

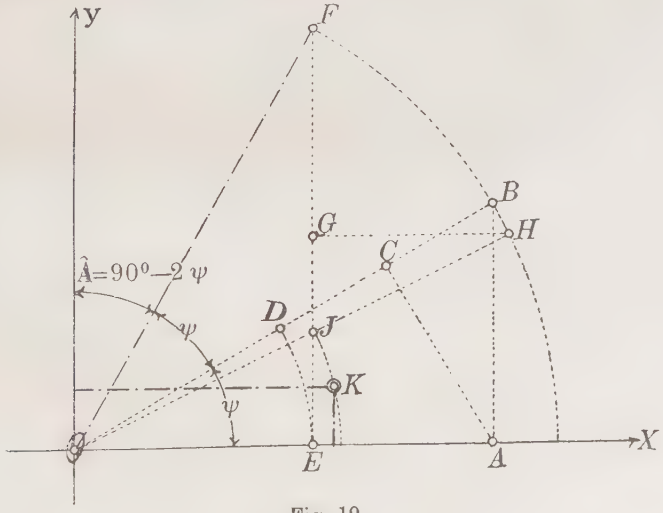

Fig. 19.

den Kreis, der die x-Achse in E schneide, und mit $\overline{OB}$ einen konzentrischen Kreis, der die durch E zur y-Achse gezogene Parallele in F schneidet. Durch den Halbierungspunkt G von EF ziehe man die Parallele zur x-Achse bis zum Schnittpunkt H mit dem zuletzt gezogenen Kreis. Die Verbindungslinie OH schneide EF in J. Dann schlage man mit $\overline{OJ}$ als Radius um O einen dritten Kreis und halbiere den zwischen der x-Achse und dem Punkt J liegenden Bogen. Die Koordinaten des sich so ergebenden Punktes K sind die gesuchten Größen b und c.

Zur Konstruktion der Hauptlagen muß schließlich noch einer der Vierseitswinkel bekannt sein. Wir benutzen den Winkel $\hat{\mathbf{A}}$, der nach (15) bestimmt ist durch

$$\sin\hat{\mathbf{A}} = \frac{a^2-d^2}{a^2+d^2}, \qquad \cos\hat{\mathbf{A}} = \frac{2ad}{a^2+d^2};$$

es ist also

$$\cos\hat{\mathbf{A}} = 2\sin\psi\cos\psi = \sin 2\psi,$$

mithin

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\pi}{2} - 2\psi.$$

Dieser Winkel ist aber bei der oben angegebenen Konstruktion schon mit ermittelt worden, und zwar ist es derjenige Winkel, den die Gerade OF mit der y-Achse bildet.

Es kann also nunmehr mit Hilfe dieser Angaben bei gegebenen a und d jederzeit das betreffende Gelenkviereck in seiner Hauptlage gezeichnet werden. Da ferner $\sin\hat{\mathbf{A}}$ und $\cos\hat{\mathbf{A}}$ unabhängig von b und c sind und beim Vertauschen von a mit d nur $\sin\hat{\mathbf{A}}$ das Vorzeichen wechselt, kann derselbe Winkel $\hat{\mathbf{A}}$ auch zur Konstruktion der drei weiteren oben angegebenen Koppellagen verwendet werden, wobei nur zu bemerken ist, daß infolge des Zeichenwechsels von $\sin\hat{\mathbf{A}}$ beim Vertauschen von a und d die entsprechende symmetrische Koppellage zu wählen wäre, was ja aber an sich auf die Konstruktion des Gelenkvierecks selbst ohne Einfluß ist.

Die Figuren (20) zeigen für ein gegebenes bestimmtes Verhältnis $\frac{a}{d}$ die vier möglichen Hauptlagen des Gelenkvierecks mit den entsprechenden gestreckten Koppelkurven, die

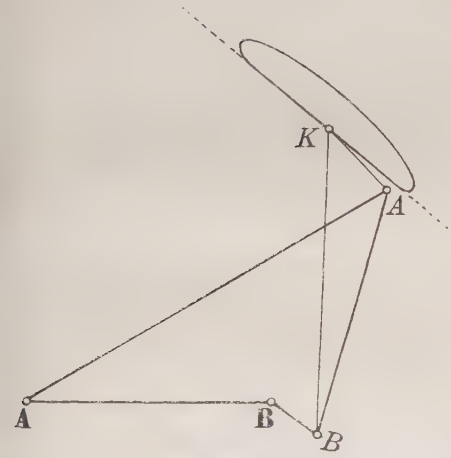

Fig. 20 a.

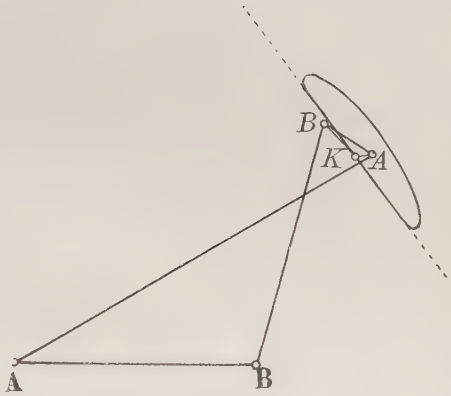

Fig. 20 b.

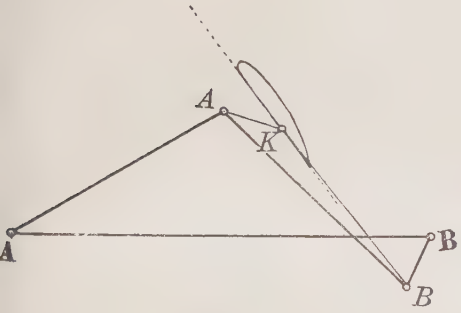

Fig. 20 c.

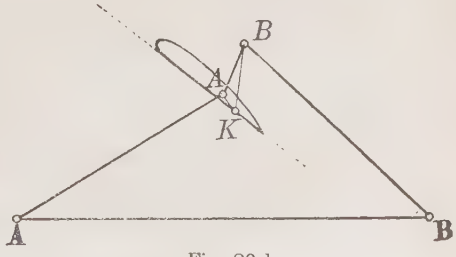

Fig. 20 d.

der Ballsche Punkt K jedesmal erzeugt. Hierbei wurden Polbahntangente, — normale, Wendepol und Ballscher Punkt nach den allgemeinen, früher angegebenen Konstruktionen ermittelt. Schließlich wurden auf Tafel (IX) für verschiedene Werte von $\frac{a}{d}$ die entsprechenden Gelenkvierecke mit ihren gestreckten Koppelkurven, und zwar nur in der ersten zu $\frac{K}{2}$ gehörigen Hauptlage, gezeichnet. Die Gliedlängen b und c wurden teils konstruktiv, teils auf Grund der Gl. (15) p. 107 ermittelt. Die entsprechenden Werte der Seiten a, b, c, d und des Winkels $\hat{A}$ sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

a	d	b	c	$\hat{A}$
8	2	7,43	0,89	61° 55′ 41″
8	3	6,72	1,14	48° 53′ 17″
8	4	5,73	1,20	36° 52′ 13″
8	$\frac{a}{3}\sqrt{3} = 4{,}62$	5,00	1,14	30°
8	5	4,50	1,07	25° 59′ 20″
8	6	3,09	0,79	16° 15′ 33″

Es würde nunmehr noch notwendig sein, die Hauptparameter $-\frac{K}{2}\left(-\frac{K}{2}+2iK'\right)$ zu untersuchen. Die betreffenden Rechnungen gestalten sich ganz analog wie für $\frac{K}{2}$, und zwar erhält man jetzt

$$\cot\alpha = \frac{d}{a}, \qquad \cot\beta = \frac{c}{b}, \qquad \cot\gamma = \frac{b}{c}, \qquad \cot\delta = \frac{a}{d}.$$

Die für fünfpunktige Berührung geltende Bedingungsgleichung nimmt daher die Form an:

$$2bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)=0.$$

Dieser Gleichung kann aber unter der Voraussetzung von positiven Gliedlängen nicht genügt werden; es existieren also keine Gelenkvierecke, die die Hauptlagen $\frac{K}{2}\left(-\frac{K}{2}+2iK'\right)$ annehmen können.

Vorliegende Arbeit wurde im Mathematischen Seminar der Königl. Technischen Hochschule zu Dresden unter Leitung des Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Krause begonnen. Für die wertvollen Anregungen und die liebenswürdige Unterstützung bei der Abfassung dieser Arbeit drängt es mich, Herrn Geheimrat Krause auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank zum Ausdruck zu bringen.

Tafel I.

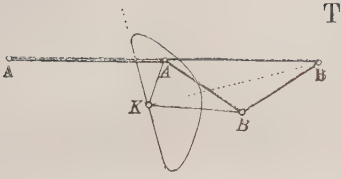

Fig. 1.

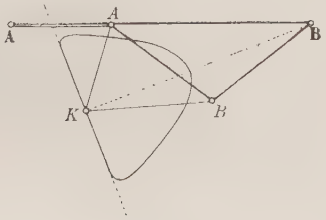

Fig. 2.

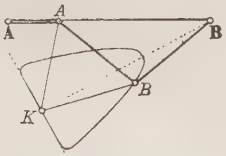

Fig. 3.

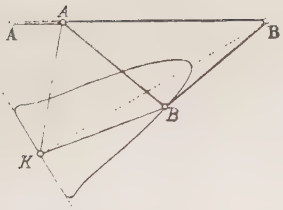

Fig. 4.

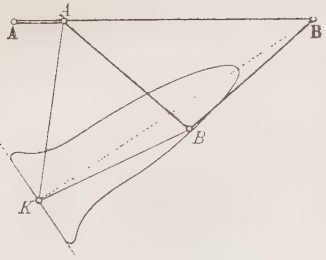

Fig. 5.

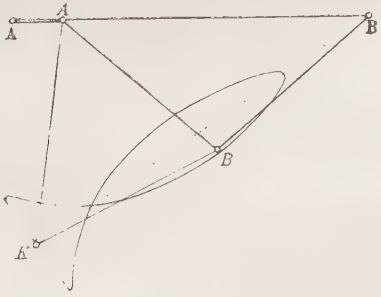

Fig. 6.

Tafel II.

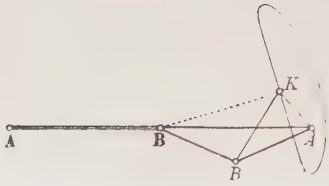

Fig. 1.

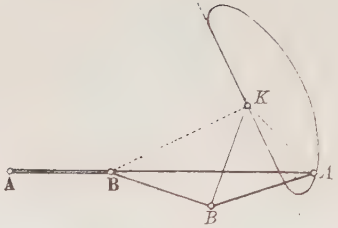

Fig. 2.

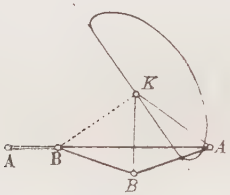

Fig. 3.

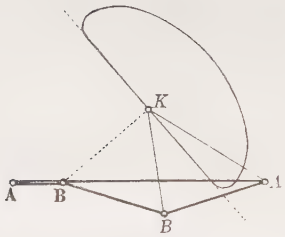

Fig. 4.

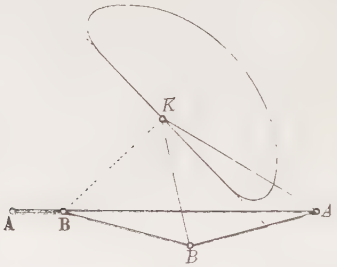

Fig. 5.

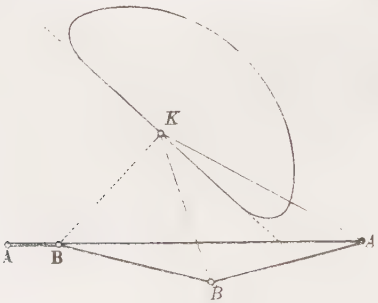

Fig. 6.

Tafel III.

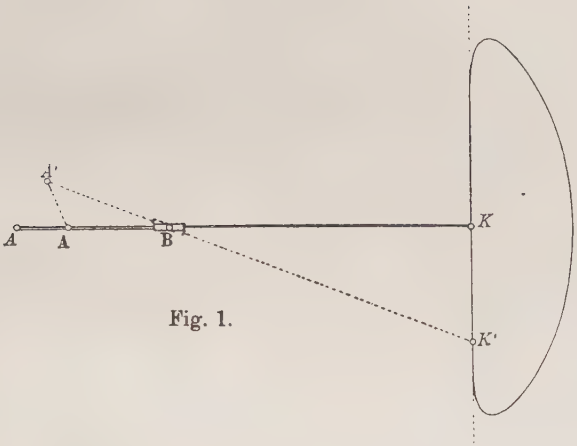

Fig. 1.

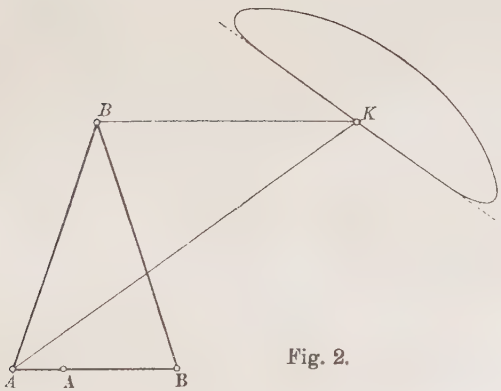

Fig. 2.

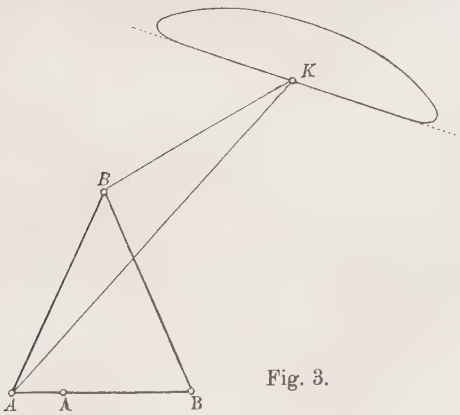

Fig. 3.

Tafel IV.

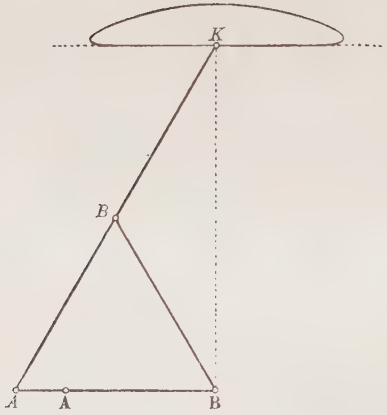

Fig. 1.

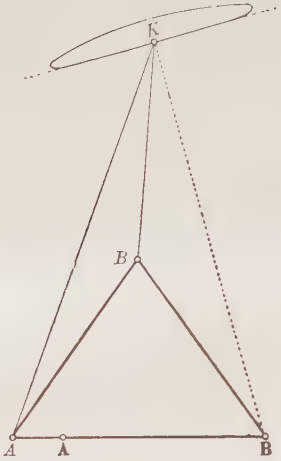

Fig. 2.

Fig. 3.

Tafel V.

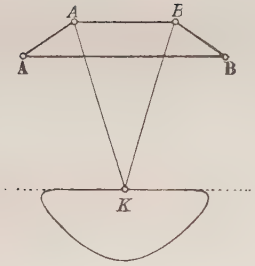

Fig. 1.

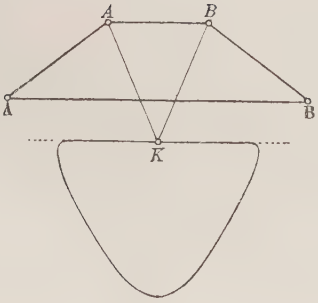

Fig. 2.

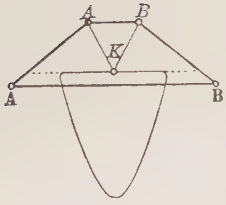

Fig. 3.

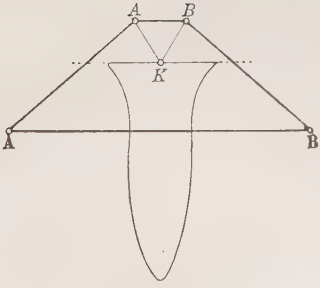

Fig. 4.

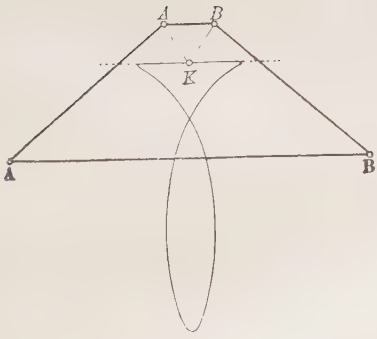

Fig. 5.

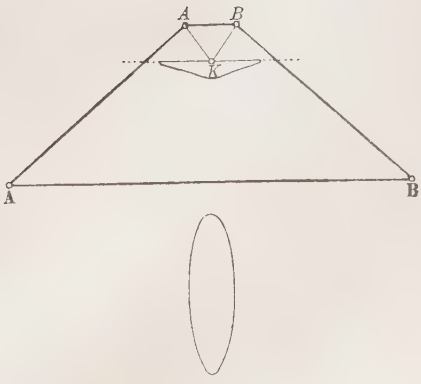

Fig. 6.

Tafel VI.

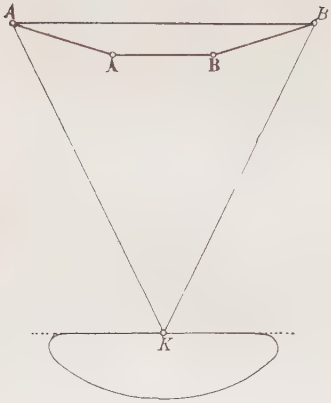

Fig. 1.

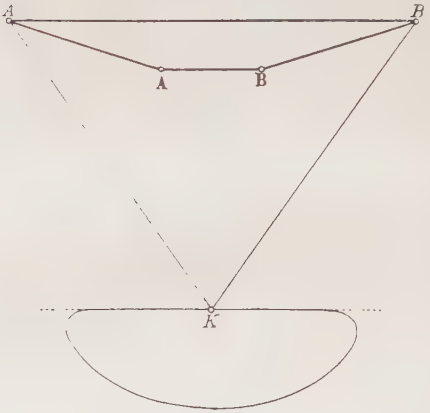

Fig. 3.

Fig. 2.

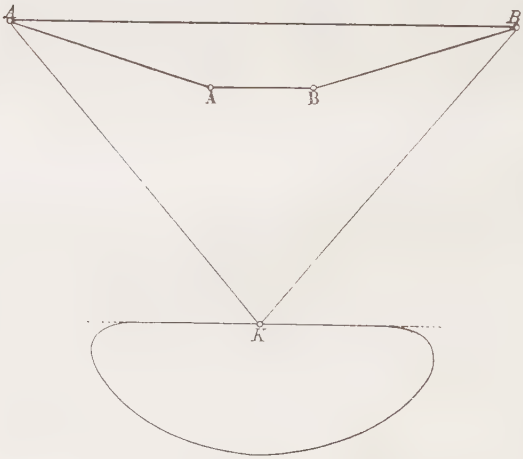

Fig. 4.

Tafel VII.

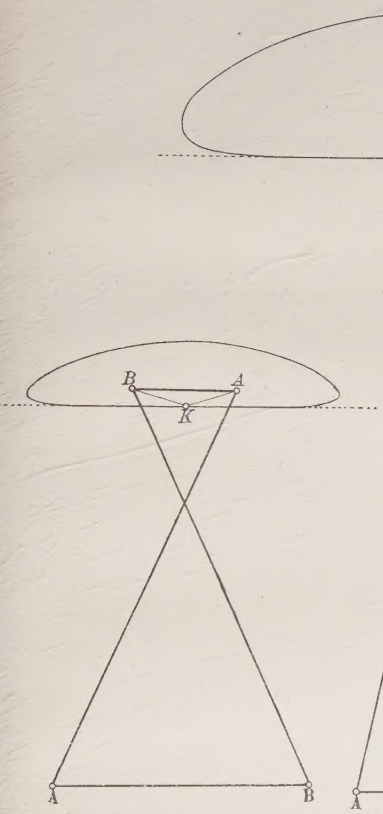

Fig. 1.

Fig. 2.

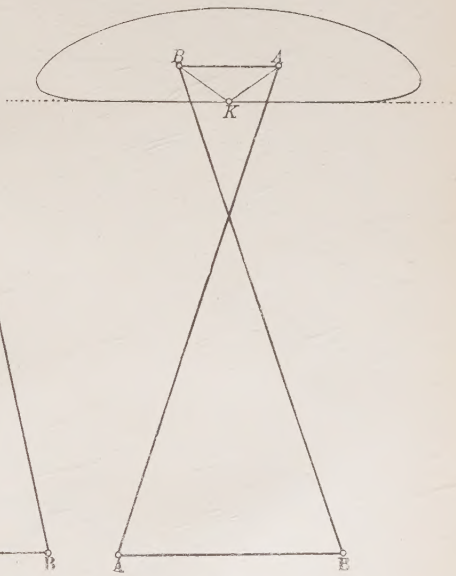

Fig. 3.

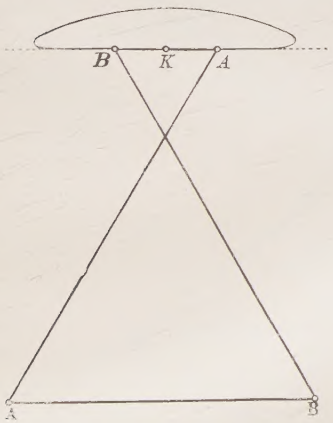

Fig. 4.

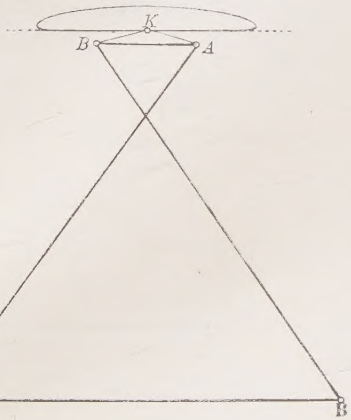

Fig. 5.

Tafel VIII.

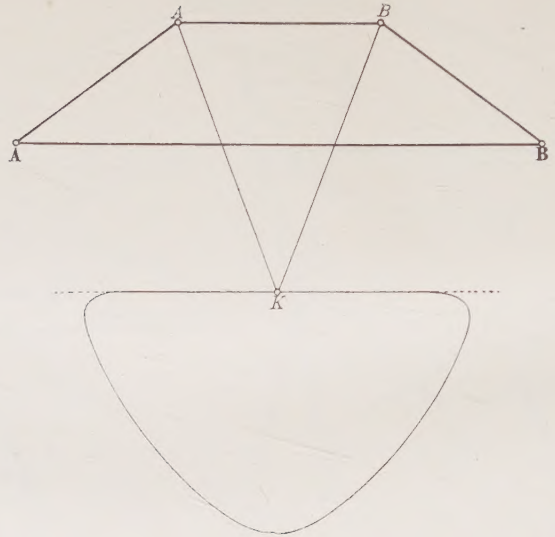

Fig. 1.

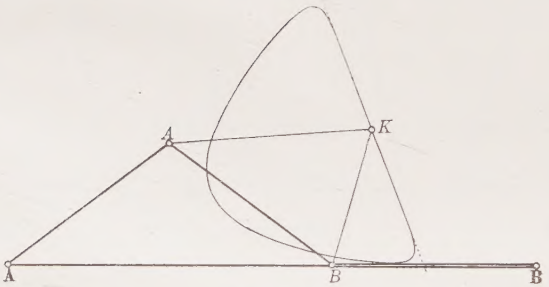

Fig. 2.

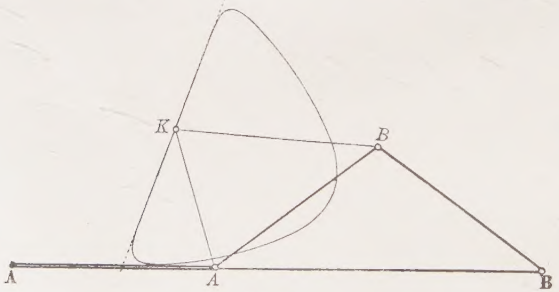

Fig. 3.

Tafel IX.

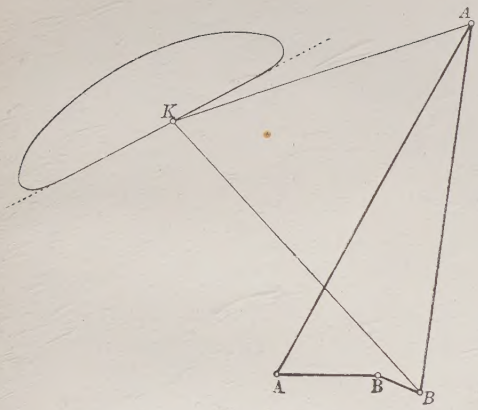

Fig. 1.

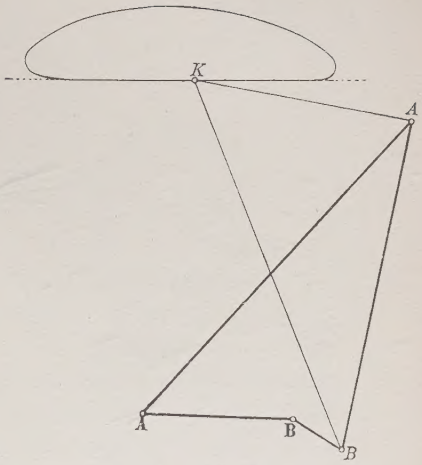

Fig. 2.

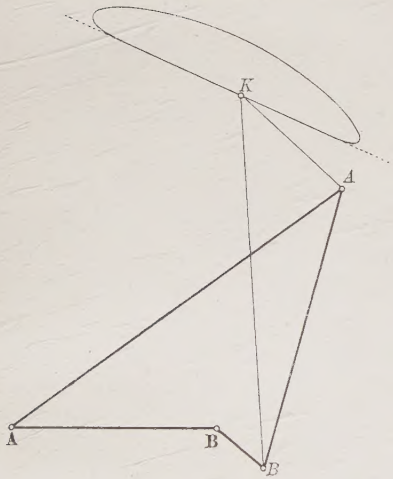

Fig. 3.

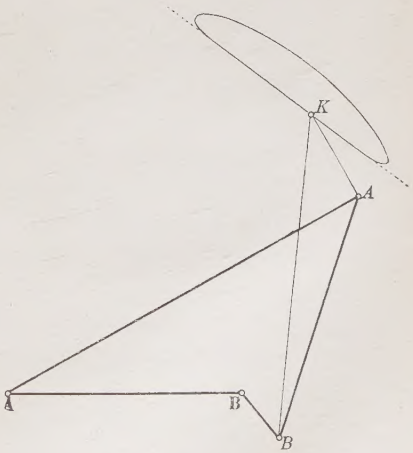

Fig. 4.

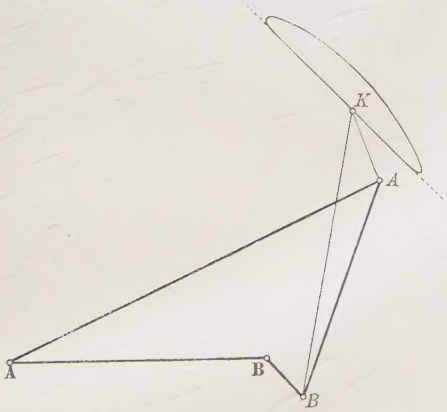

Fig. 5.

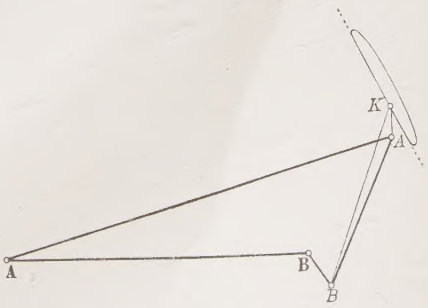

Fig. 6.

Lebenslauf.

Ich, Ernst Martin Blauert, evang.-luth. Konfession, wurde geboren am 30. Oktober 1881 zu Dresden-Plauen als Sohn des Baumeisters Hermann Blauert und seiner Ehefrau Hermine geb. Hartig. Nach vierjähriger Vorbildung auf der höheren Volksschule zu Dresden-Plauen besuchte ich die Annenschule (Realgymnasium) zu Dresden-A. und erlangte daselbst Ostern 1901 das Reifezeugnis. Hierauf studierte ich auf der Techn. Hochschule zu Dresden bis Ostern 1906 Mathematik und Physik, war im Sommer 1906 als Hauslehrer tätig und beendete meine Studien im Winter 1906/7 auf der Universität Rostock. Während meiner Dresdener Studienzeit war ich mehrmals im Sächsischen Landtag als Hilfsstenograph tätig und legte im Oktober 1903 die staatliche Stenographielehrerprüfung ab. Im Juni 1907 bestand ich an der Techn. Hochschule zu Dresden die Prüfung für Kandidaten des höheren Lehramts, leistete an der Drei-König-Schule (Realgymnasium) zu Dresden-N. mein Probejahr ab und wurde hierauf vom Kgl. Ministerium des Innern zunächst dem Kgl. Stenographischen Landesamte zu Dresden als Hilfsarbeiter zugewiesen. Seit 1. Oktober 1908 bin ich an den Technischen Staatslehranstalten zu Chemnitz als Lehrer für Mathematik und verwandte Fächer angestellt.

Am 17. Mai 1911 bestand ich das Examen rigorosum.